F

<36603953190013

<36603953190013

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 725

Matheseos. Systemata et methodi ord: chronol: 147.

R

Grundriß der reinen Mathematik

zum Gebrauche bei Vorlesungen und beim eigenen Studium,

von

J. G. E. Maaß,

Professor der Philosophie zu Halle und der litterarischen Gesellschaft zu Halberstadt Mitgliede.

Mit vier Kupfertafeln.

Halle,
in der Rengerschen Buchhandlung.
1796.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Den Zweck dieses Lehrbuches giebt der Titel an. Durch diesen Zweck sind zugleich die Gesetze bestimmt, die ich bei der innern Einrichtung desselben vor Augen haben mußte. Die größere oder geringere Ausführlichkeit, womit die einzelnen Materien behandelt sind, hieng von den individuellen Verhältnissen ab, worin ich mich mit meinen Vorlesungen befinde.

Was mein Buch Eigenthümliches hat, werden die Kenner von selbst bemerken, ohne daß ich darauf aufmerksam mache.

Daß übrigens diese Schrift nur den ersten Theil meines Grundrisses der reinen Mathematik enthalte, würde der Titel bemerkt haben; wenn dies nicht auf die Herausgabe eines zweiten Theiles gedeutet hätte, worüber ich doch noch nichts bestimmen kann.

Halle, im October 1795.

Der Verfasser.

Einlei-

Einleitung.

I.
Vorläufige Begriffe.

§. 1.
Begriffe, die für sich klar sind.

Eins. Raum. Größe eines Dinges.

Anmerkung.

Auch wird dasjenige, dem Größe zukömmt, tropisch eine Größe genannt.

§. 2.
Erklärung.

Sofern Etwas als Eins betrachtet wird, heißt es eine Einheit; und sofern Etwas einen Raum erfüllt, wird es ausgedehnt genannt. Ein Inbegriff von Einheiten ist eine Zahl.

§. 3.
Erklärung.

Die Größe eines Dinges ist stätig, sofern die (außer- oder in- einander seyenden) Theile desselben unmittelbar zusammenhängen; sofern sie nicht

nicht unmittelbar zusammenhängen, sondern von einander abgesondert sind, ist die Größe des Dinges diskret.

§. 4.

Erklärung.

Die Wissenschaft von der Größe der Dinge ist die Mathematik.

Anmerkung.

Zu einer Wissenschaft im strengen Verstande wird erfordert, daß sie ihre Lehren mit apodiktischer Gewißheit beweise. Apodiktische Gewißheit aber kann nicht aus der Erfahrung entstehen. Die Erfahrung lehrt nur, daß ein Ding so oder so ist, aber nicht, daß es so seyn muß. Denn wenn auch alle Wahrnehmungen ohne Ausnahme gezeigt haben, daß ein gewisses Ding so oder so sey, so kann man doch aus der Erfahrung nicht wissen, ob nicht eine künftige Wahrnehmung das Gegentheil zeigen werde. Das kann man eben darum nicht, weil die künftige Wahrnehmung noch künftig ist, und die Unmöglichkeit des Gegentheiles selbst sich nicht wahrnehmen läßt; indem nur das wahrgenommen werden kann, was wirklich ist, aber nie eine Möglichkeit oder Unmöglichkeit. Eine strenge Wissenschaft kann also ihre Wahrheiten nicht auf die Erfahrung gründen. Sie muß sie also aus andern Wahrheiten beweisen, die, unabhängig von der Erfahrung, a priori eingesehen werden. Und wenn diese letztern noch nicht für sich selbst gewiß sind, so müssen sie wieder aus andern Wahrheiten von eben der Art abgeleitet

leitet werden; und das so fort, bis man auf solche Sätze kömmt, die weiter keines Beweises bedürfen. Ein Satz, der keines Beweises bedarf, sofern daraus andere Wahrheiten abgeleitet werden, heißt überhaupt ein Princip, und wenn er a priori gewiß ist, ein rationales, wenn er aber aus der Erfahrung genommen wird, ein empirisches Princip. Eine strenge Wissenschaft muß also rationale Principien zum Grunde legen; und da die Mathematik eine strenge Wissenschaft ist, so müssen ihre Lehren insgesammt auf dergleichen Principien gegründet seyn.

§. 5.

Erklärung.

Ein Ding wird *in concreto* betrachtet, sofern es als eine Bestimmung in einem andern Dinge betrachtet wird; sofern es nicht als eine solche, sondern für sich allein betrachtet wird, wird es *in abstracto* betrachtet Wenn also A in abstracto betrachtet wird, so werden bloß diejenigen Merkmale erwogen, die zu A selbst gehören, es wird aber abstrahirt von allen andern, die sich in den Dingen noch finden, in welchen A als Bestimmung vorhanden ist. Diese andern Merkmale werden dagegen mit in Anschlag gebracht, wenn man A in concreto betrachtet.

§. 6.

Erklärung.

Die Mathematik, sofern sie die Größe *in abstracto* betrachtet, ist die reine und sofern sie

dieselbe *in concreto* betrachtet, die **angewandte** Mathematik.

§. 7.

Erklärung.

Man kann eine Zahl in abstracto und in concreto betrachten: denn man kann sich sowol einen Inbegriff von Einheiten überhaupt, als auch einen Inbegriff solcher Einheiten denken, die Dinge von bestimmter Art sind. Die Wissenschaft von den Zahlen ist die **Arithmetik**. Sie ist **rein**, sofern sie die Zahlen in abstracto betrachtet; **angewandt**, sofern sie dieselben in concreto betrachtet.

§. 8.

Erklärung.

Eine Zahl ist eine **einzelne**, wenn sie durchgängig, also in Absicht auf die Menge ihrer Einheiten, bestimmt ist; wenn sie aber nicht in Absicht auf die Menge ihrer Einheiten, also nicht durchgängig, bestimmt ist, so ist sie eine **allgemeine** Zahl. Mit den einzelnen Zahlen beschäftigt sich die **gemeine Arithmetik** (Arithmetik schlechthin), mit den allgemeinen aber die **allgemeine Arithmetik** oder **Buchstabenrechenkunst**.

§. 9.

Erklärung.

Aus gegebenen Zahlen andere finden, heißt **rechnen**, und eine Größe **berechnen**, heißt, sie durch Rechnung deutlich erkennen. Ein Satz, der aussagt, welchem andern das eine gleich sey,

ist eine Gleichung. Die Wissenschaft, Größen überhaupt, vermittelst der Gleichungen zu berechnen, heißt die Algebra, oder die gemeine Analysis.

§. 10.

Erklärung.

Die ausgedehnte Größe kann entweder in concreto, in gegebenen ausgedehnten Dingen, oder in abstracto, betrachtet werden. Die Wissenschaft von der ausgedehnten Größe ist die Geometrie. Sie ist rein, sofern sie die ausgedehnte Größe in abstracto, und angewandt, sofern sie dieselbe in concreto betrachtet.

§. 11.

Erklärung.

Die gemeine Geometrie (Geometrie schlechthin) betrachtet die grade Linie und die Kreislinie, nebst dem, was dadurch mittelbar und unmittelbar entsteht; die höhere aber die übrigen krummen Linien, nebst dem, was dadurch mittelbar und unmittelbar entsteht.

§. 12.

Erklärung.

Aus der Verbindung der Geometrie und Arithmetik entstehet die Trigonometrie, das ist: die Wissenschaft von der Berechnung der Triangel. Ihre Lehren können dann auch auf andere Figuren angewendet werden.

§. 13.

Erklärung.

Außer der höhern Geometrie gehört zu der höhern Mathematik noch die Rechnung des Unendlichen, oder, die höhere Analysis, worunter die Differential- und Integral-Rechnung begriffen ist.

§. 14.

Zusatz.

Aus der Anwendung der genannten verschiedenen Theile der reinen Mathematik auf die Gegenstände in der Natur, und deren Veränderungen, entstehen dann die verschiedenen Theile der angewandten Mathematik.

§. 15.

Erklärung.

Die Methode einer Wissenschaft besteht in der Ordnung, in welcher sie ihre Lehren aufeinander folgen läßt. Alle Ordnung aber ist eine Stellung nach gemeinschaftlichen Regeln. Folglich setzt jede Methode eine Regel voraus, die in der Zusammenstellung des Mehrern beobachtet wird, und ist verschieden, je nachdem diese Regel verschieden ist.

§. 16.

Erklärung.

Wenn die Wahrheiten einer Wissenschaft so auf einander folgen, daß man immer von den Gründen zu den Folgen fortgehet; so ist die Methode

thode synthetisch; folgen sie aber so auf einander, daß man immer von den Folgen zu den Gründen zurück gehet, so ist die Methode analytisch. Auch kann die Methode aus diesen beiden zusammengesetzt und also gemischt seyn. Die erste heißt auch vorzugsweise die mathematische Methode.

§. 17.

Zusatz.

In der synthetischen Methode gehen die Grundsätze und Postulate den von ihnen abhängigen Lehrsätzen und Aufgaben vorauf; die Erklärungen der höhern Begriffe müssen den Erklärungen der niedrigern vorausgehen, und diejenigen Sätze, die von den erstern etwas aussagen, eher erwogen werden, als die, welche von den letztern handeln.

§. 18.

Anmerkung.

Das sorgfältige Studium der reinen Mathematik ist jedem angehenden Gelehrten ganz vorzüglich zu empfehlen. Denn, wenn man auch von dem so ausgebreitet nützlichen Gebrauche, den man von ihren Lehren machen kann, ganz absehen will; so hat doch schon das bloße Studium dieser Wissenschaft seinen sehr großen unmittelbaren Werth. Es gehört dasselbe zu den vorzüglichsten Uebungen im Denken. Denn 1) die Begriffe in der reinen Mathematik sind vollkommen deutlich und bestimmt. Der Verstand wird also an Deut-

lichkeit und Bestimmtheit der Begriffe gewöhnt, und zugleich im Abstrahiren geübt. 2) Die Uebereinstimmungen und Verschiedenheiten der Größen werden mit vollkommener Schärfe bestimmt, und unter die allgemeinen Regeln wird das Besondere mit vollkommener Präcision subsumirt. Die Urtheilskraft wird sonach auf eine ganz vorzügliche Art im Vergleichen, Unterscheiden und Subsumiren geübt. 3) Alle einzelne Lehren werden aus unläugbaren Principien durch vollkommen zureichende Beweise dargethan; das gewöhnt die Vernunft an Gründlichkeit im Denken; und weil immer eine Wahrheit wieder aus der andern abgeleitet wird, auch die Beweise öfters eine längere Reihe zusammenhängender Vernunftschlüsse erfordern, so übt sich die Vernunft in der Kunst, eine größere Menge von Wahrheiten im Zusammenhange zu übersehen; wobey auch, wenn sie auf das Auffinden der Beweise achtet, ihre Scharfsichtigkeit auf eine ganz vorzügliche Art geübt wird. Durch die strenge Methode endlich — welches von großer Wichtigkeit ist — gewöhnt man sich an Ordnung im Denken.

Ja! auch für die Disciplin der Einbildungskraft ist das Studium der reinen Mathematik, oder insbesondere der Geometrie, von nicht geringem Nutzen. Denn hier wird die Einbildungskraft geübt, Anschauungen nach Begriffen zusammenzusetzen, die von dem Verstande bestimmt vorgeschrieben sind.

II.

Grundsätze der ganzen Mathematik.

§. 19.

Grundsatz.

Jede Größe ist sich selber gleich. Das Ganze ist also so groß, als alle seine Theile zusammengenommen, und größer als einer oder einige davon.

§. 20.

Grundsatz.

Zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch sich selber gleich.

§. 21.

Grundsatz.

Gleiches, auf gleiche Art verändert, giebt Gleiches.

III.

Von den mathematischen Zeichen.

§. 22.

Erklärung.

Das Zeichen ($=$) bedeutet die Gleichheit. $A = B$, will sagen, A sey eben so groß als B.

Das Zeichen ($>$) bedeutet die Ungleichheit, so, daß die Spitze immer auf das Kleinere und die Oeffnung auf das Größere hinzeigt. $A > B$, heißt: A ist größer als B: und, $A < B$, heißt: A ist kleiner als B.

Das Zeichen (∾) bedeutet die Aehnlichkeit. A ∾ B, bedeutet, A und B seyen einander ähnlich.

Das Zeichen (≌) bedeutet Aehnlichkeit und Gleichheit zusammen, oder, die Kongruenz. A ≌ B will sagen: A und B sind kongruent.

Das Zeichen (+) bedeutet das Hinzusetzen. A + B, heißt: zu A ist B hinzugesetzt.

Das Zeichen (—) bedeutet das Wegnehmen. A — B, heißt: von A ist B weggenommen.

Die Ziffern, oder Zeichen, womit wir die Zahlen bezeichnen, sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Ihre Bedeutungen sind bekannt.

§. 23.

Erklärungen und Anmerkungen.

Die Bestandtheile, woraus ein Zeichen bestehet, mögen Elemente des Zeichens heissen, und die Bestandtheile, woraus die bezeichnete Sache bestehet, von welcher Art sie auch immer seyn mögen, sollen Elemente des Bezeichneten heißen. Ein Zeichen heißt ein wesentliches, sofern durch die Verhältnisse seiner Elemente gegen einander die Verhältnisse bezeichnet werden, welche unter den Elementen des Bezeichneten statt finden.

Bey allgemeinen Objecten (dergleichen in allen Begriffen, oder Vorstellungen des Verstandes, gedacht werden) kann dies auf eine doppelte Art geschehen: 1) wenn das Zeichen ein einzelnes Object ist, worin das Bezeichnete in concreto

vor-

vorgestellet wird; in welchem Falle es ein *wesentliches Zeichen vom ersten Range* heiße; 2) wenn für jede Art von Verhältniß unter den Elementen der bezeichneten Sachen eine willkührliche allgemeine Regel festgesetzt ist, die bestimmt, durch welche Art von Verhältniß unter den Zeichenelementen dieselbe bezeichnet werden soll; alsdenn bekömmt man ein *wesentliches Zeichen vom zweyten Range*; und es giebt hiebey wieder zwey Fälle. Es kann

a) seyn, daß anstatt des Bezeichneten ein ähnliches Objekt gesetzt und dieses dann in einem einzelnen Objekte in concreto vorgestellet wird; es kann auch

b) seyn, daß kein anderes Objekt anstatt des Bezeichneten gesetzt wird. Im erstern Falle ist das Zeichen *tropisch* und im andern *eigentlich*.

Durch ein wesentliches Zeichen vom ersten Range wird das Bezeichnete anschaulich dargestellt. So ist z. B. das Zeichen ${}_a\overset{b}{\triangle}_c$ ein wesentliches Zeichen vom ersten Range für den Triangel, und die Geometrie hat dergleichen Zeichen für alle ihre Objekte. Eben so ist auch das Zeichen ein wesentliches Zeichen vom ersten Range für die Zahl drey und zwanzig. Die Arithmetik könnte auf diese Art alle Zahlen bezeichnen; nur würde das bey großen Zahlen eine unübersehbare Weitläuftigkeit erfordern.

Durch

Durch die tropischen wesentlichen Zeichen können die logischen Verhältnisse unter den Begriffen, Urtheilen und Vernunftschlüssen bezeichnet werden. (Siehe davon meine Logik, §. 365. f.)

Eigentliche wesentliche Zeichen vom zweyten Range hat die Arithmetik und die Algebra. Ein solches ist z. B. das Zeichen 23 für die Zahl drey und zwanzig. Durch die bloße Stellung der einzelnen Ziffern, also durch ihr Verhältniß im Raume, wird bezeichnet, wie sich die durch sie bezeichneten Zahlen gegen einander verhalten. Dadurch nemlich, daß die Ziffer 2 in der nächsten Stelle vor der Ziffer 3 stehet, wird bezeichnet, daß die Einheiten der Zahl zwey zehnmal so groß seyen, als die Einheiten der Zahl drey. Also durch das Verhältniß unter den Elementen des Zeichens wird das Verhältniß bezeichnet, welches unter den Elementen des Bezeichneten statt findet *).

Durch

*) Wer mit der logischen Theorie der Zeichen vertraut ist, wird leicht einsehen, daß diese Bemerkungen allgemein für die Bezeichnung aller Zahlen gelten; und zwar nicht bloß bey der gemeinen Art zu zählen, sondern auch in jedem andern Systeme. Die allgemeine willkührliche Regel, wonach die Bezeichnung jeder Zahlenreihe zusammengesetzt wird, ist, symbolisch vorgestellt, diese:

$$\alpha.\, a^{n} + \beta.\, a^{n-1} + \gamma.\, a^{n-2} \ldots + \varkappa.\, a^{n-n} + \lambda.\, a^{n-\overline{n+1}} + \mu.\, a^{n-\overline{n+2}} \ldots$$

wenn a die Grundzahl irgend eines Zahlensystems (welche bey der gemeinen Art zu zählen 10 ist) und α, β, γ... die Koëfficienten bedeuten.

Durch ein wesentliches Zeichen von dieser Art wird weder das Bezeichnete selbst, noch auch das Verhältniß unter den Elementen desselben, in concreto und anschaulich vorgestellt. Wenn man das Zeichen 23 setzt; so ist die Ziffer 3 kein individueller Inbegriff von drey Einheiten, stellt also die Zahl drey (als welche ein Inbegriff von drey Einheiten überhaupt ist) nicht in concreto vor. Noch weniger aber enthält ein einzelnes Ding dadurch, daß es im Raume vor einem andern stehet, dieses andere auf irgend eine Weise zehnmal in sich. Also, daß die 2 vor der 3 stehet, ist auf keine Art eine konkrete, oder anschauliche Darstellung des Verhältnisses im Bezeichneten, des Verhältnisses nämlich, daß die Einheiten der Zahl zwey zehnmal so groß seyen, als die Einheiten der Zahl drey.

Ein Inbegriff von Zeichen, wodurch alle Objekte einer gewissen Klasse bezeichnet werden können, und worunter alle abgeleiteten Zeichen wesentliche, und nach einer gemeinschaftlichen Regel zusammengesetzt sind, ist ein Zeichensystem.

§. 24.

Erklärung und Anmerkung.

Einen Begriff konstruiren heißt, dasjenige, was darin gedacht wird, in concreto darstellen in einem einzelnen Objekte, wovon die Vorstellung a priori möglich ist. Wenn also die Bedingungen eines wesentlichen Zeichens vom ersten Range a priori gegeben sind, so ist dasselbe

zu-

zugleich eine Konstruktion. Dies ist der Fall mit den wesentlichen Zeichen der Geometrie — die Vorstellung vom Raume mag ursprünglich entstehen, woher sie will. Genug, diese Vorstellung ist vorhanden; und die Einbildungskraft kann durch Trennen und Zusammensetzen jedesmal a priori die Vorstellung von einer solchen individuellen Figur zu Stande bringen, worin das, was der Begriff im allgemeinen denkt, in concreto angeschauet wird. Wenn ich z. B. den Begriff eines Triangels denke, und dazu dieses wesentliche Zeichen △ verzeichne; so habe ich meinen Begriff konstruirt. Doch macht keinesweges die Verzeichnung der Figur auf dem Papier, sondern bloß die Verzeichnung derselben in Gedanken die eigentliche Konstruktion des Begriffes aus. Die erstere beruht auf empirischen Bedingungen, und ist nur eine äußere Darstellung der eigentlichen Konstruktion.

So wie die Geometrie alle ihre Begriffe konstruiren kann; so können dagegen die Arithmetik und Algebra ihre Begriffe gar nicht konstruiren. Denn durch die wesentlichen Zeichen, welche diese Wissenschaften haben, werden weder die bezeichneten Objekte selbst, noch auch die Verhältnisse unter ihren Elementen, in concreto oder anschaulich dargestellet. Diese wesentlichen Zeichen machen also keine Konstruktion aus.

Will man den Begriff der Konstruktion anders fassen und etwa mit einigen Neuern sagen, einen Begriff konstruiren heiße, ihn durch wesentliche

liche Zeichen ausdrücken; so werden freylich auch die Begriffe in der Arithmetik und Algebra konstruirt. Aber theils könnte man dann nicht bloß in der Mathematik, sondern auch in der Philosophie Begriffe konstruiren, als z. B. in der Syllogistick, wo man die Begriffe ebenfalls durch wesentliche Zeichen, die überdem von eben der Art seyn können, als in der Arithmetik und Algebra, bezeichnen kann; welches zu sagen aber dem allgemeinen Sprachgebrauch entgegen ist: theils ist es insbesondre dem Sprachgebrauche der Mathematiker zuwider, wenn man die arithmetischen und algebraischen Bezeichnungen der Begriffe Konstruktionen derselben nennen will. Die Mathematiker erkennen diese Zeichen bekanntlich nicht für Konstruktionen.

§. 25.

Anmerkung.

Die Wahrheiten der Mathematik sind apodiktisch gewiß, und ihre Gewißheit und Evidenz beruhet zum Theil auf den wesentlichen Zeichen. Durch Hülfe dieser Zeichen wird eine vollkommene Bestimmtheit und Deutlichkeit, imgleichen die größtmögliche Kürze, und Leichtigkeit der Uebersicht zu Stande gebracht, und von dem allen hängt die Gewißheit zum Theil ab.

Erstes Buch.

Arithmetik.

I.

Von den Zahlen überhaupt.

§. 26.

Erklärung.

Eine Einheit wird entweder als ein Inbegriff anderer Einheiten betrachtet, oder nicht. Im letztern Falle heißt sie eine einfache oder primitive Einheit, und insbesondre auch ein Einer; im erstern Falle aber eine zusammengesetzte, oder abgeleitete, oder höhere Einheit. Eine Zahl kann aus einfachen, oder aus höhern, oder aus einfachen und höhern Einheiten zusammen, bestehen.

§. 27.

Erklärung.

Ferner wird eine Einheit entweder als ein Ganzes für sich, oder nur als ein Theil von einem gewissen Ganzen betrachtet. Eine Zahl, deren Einheiten als Ganze betrachtet werden, heißt eine ganze, und eine solche, deren Einheiten als Theile von einem gewissen Ganzen betrachtet werden, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch.

§. 28.

Zusatz und Erklärung.

Wenn man von der Größe einer gebrochenen Zahl einen deutlichen Begriff haben will; so muß man

man zweyerley wissen: 1) was für Theile des Ganzen es sind, die dieselbe zu Einheiten hat, oder, wie viele dergleichen Theile auf ein Ganzes gehen, und 2) wie viel solcher Theile sie enthält. Wenn mir jemand bloß sagt, er habe drey Theile vom Thaler, so weiß ich nicht, wie viel er hat; er muß zuvor noch angeben; was für Theile es sind. Und wenn jemand sagt, er habe Sechstel vom Thaler, so kann auch niemand wissen, wie viel er hat, bevor er nicht anzeigt, wie viele Sechstel er habe. Zur Bezeichnung eines Bruches sind also zwey Zahlen erforderlich: 1) diejenige, welche anzeigt, wie viele Einheiten der Bruch enthält, — diese heißt der Zähler, und 2) diejenige, welche anzeigt, wie viel dergleichen Einheiten auf ein Ganzes gehen, — diese wird der Nenner genannt. Man schreibt beide übereinander, den Zähler oben, den Nenner unten, und trennt sie durch einen Strich, in dieser Gestalt: $\frac{3}{4}$.

§. 29.

Erklärung.

Ein Verhältniß eines Dinges ist ein Prädikat, was ihm nur in sofern zukömmt, als es mit einem andern Dinge zusammen betrachtet wird. Diejenige Größe, die einem Dinge nur in sofern zukömmt, als es mit einem andern Dinge zusammen betrachtet, oder verglichen wird, ist ein Größenverhältniß, oder in der Mathematik, schlechthin ein Verhältniß. Wenn man sagt: 7 ist größer als 6, so ist das Prädikat größer ein Verhältniß der Zahl 7.

§. 30.

Zusatz 1.

Eine jede Zahl ist einer jeden andern entweder gleich, oder sie ist größer oder kleiner als dieselbe. Das sind, im Allgemeinen, alle mögliche Verhältnisse, die unter Zahlen statt finden können.

§. 31.

Zusatz 2.

Die Verhältnisse, welche unter den Zahlen, so wie unter allen Größen überhaupt, in Absicht auf die Qualität, statt finden können, sind: Entgegensetzung und Einstimmigkeit. Zwey Größen sind entgegengesetzt, sofern sie sich einander aufheben, wenn man sie vereinigen will, sofern das nicht ist, sind sie einstimmig. Die entgegengesetzten Größen heben sich gänzlich auf, wenn sie einander gleich sind, zum Theil, wenn sie ungleich sind. Im letztern Falle nämlich heben sich die kleinern, und der Theil von der grössern, der eben so viel beträgt als die kleinere, einander auf; der Ueberschuß der größern bleibt also zurück. Diejenige von den entgegengesetzten Größen, welche als die aufgehobene betrachtet wird, heißt positiv, und diejenige, welche man als die aufhebende ansiehet, negativ. An sich ist es gleichgültig, welche von beiden man als positiv und negativ annehmen will; unter gegebnen Bedingungen kann es bestimmt seyn.

§. 32.

Anmerkung.

Wenn ich z. B. fünf Schritt vorwärts gehe, und dann wieder fünf Schritt rückwärts, so sind die erstern gänzlich aufgehoben; gehe ich nur drey Schritt rückwärts, so sind die erstern nur zum Theil aufgehoben, ich bin noch zwey Schritt vorwärts. Die vorwärts und rückwärts gethanen Schritte sind also entgegengesetzte Größen. Will ich vorwärts, so sind die erstern positiv und die letztern negativ; will ich aber rückwärts, so sind die erstern negativ und die letztern positiv.

Um auszudrücken, daß eine Größe positiv oder negativ zu nehmen sey, setzt man im erstern Falle das Zeichen (+), und im andern Falle das Zeichen (—) davor, und schließt, wenn es zur Vermeidung einer Zweydeutigkeit nöthig ist, diese Zeichen mit der Größe wozu sie gehören in eine Parenthese ein; als: +8, (+8), —8, (—8). Eine Größe die keins von beiden Zeichen hat, wird für positiv geachtet.

Die Kenner der Logik werden in der Theorie der Verhältnisse unter den Begriffen überhaupt leicht das Princip entdecken, worauf die vorstehenden Wahrheiten beruhen, und woraus sie deducirt sind.

§. 33.

Erklärung.

Die allgemeinen Zahlen (§. 8.) werden durch Buchstaben ausgedrückt, und zwar so, daß man

zur Bezeichnung der bekannten oder gegebnen Zahlen die erstern Buchstaben des Alphabets, zur Bezeichnung der unbekannten oder gesuchten aber die letztern, gebraucht. Ein a oder b ꝛc. will also sagen, man solle sich nur irgend eine Zahl denken, ohne festzusetzen, wie viel Einheiten sie habe. Es gilt also gleich, man mag sich 3, oder 80, oder 1000, oder was man sonst will, darunter vorstellen.

II.

Von den Zahlensystemen.

§. 34.

Erklärung.

Aus den primitiven Einheiten werden höhere zusammengesetzt (§. 26.). Von diesen kann man wieder einen gewissen Inbegriff zusammen nehmen, und daraus eine noch zusammengesetztere, oder, noch höhere, Einheit machen; und aus den Einheiten der letztern Art wieder noch höhere, und so fort. Alsdann entstehen Einheiten der ersten, zweyten, dritten u. s. f. höhern Ordnung.

§. 35.

Erklärung.

Diese Zusammensetzung der höhern Einheiten aus den niedrigern kann gleichförmig, nach einer festgesetzten Ordnung, sie kann auch ohne eine solche Ordnung, ungleichförmig geschehen. Diejenige Ordnung unter den Zahlen, wonach

alle

alle höhererern Einheiten die nächstfolgenden niedrigern gleichvielmal in sich enthalten, heißt ein Zahlensystem.

§. 36.

Zusatz 1.

Jedes Zahlensystem setzt also ein allgemeines Gesetz voraus, welches angiebt, wie viel Einheiten jedesmal Eine Einheit von der nächst höhern Ordnung ausmachen sollen. Wenn zehn Einheiten von jeder Art Eine Einheit von der nächst höhern Ordnung ausmachen; so heißt dieses System die Dekadik, oder das Decimalsystem. Dieses System ist in der gemeinen Art zu zählen enthalten, die, in einer gewissen Bedeutung, die natürlichste, aber keinesweges nothwendig, sondern völlig willkührlich ist.

§. 37.

Zusatz 2.

Ein System, worin vier Einheiten von jeder Art Eine Einheit von der nächst höhern Ordnung ausmachen, heißt die Tetraktik. Auf ähnliche Art kann man sich eine Dyadik, Dodekadik, u. s. f. denken.

§. 38.

Anmerkung.

Die gemeine und bekannte Art, die Zahlen, nach dem Decimalsysteme, durch Ziffern zu bezeichnen, ist ein Zeichensystem (§. 23.). In der letzten Stelle rechter Hand stehen die Einer; in

 der

der erstern Stelle vor den Einern, die Einheiten der ersten höhern Ordnung, oder die Zehner; in der zweyten Stelle die Einheiten der zweyten höhern Ordnung, oder die Hunderte u. s. f. Und es ist bekannt, was die Wörter: Tausend, Million, Billion, Trillion u. s. f. sagen wollen.

§. 39.

Anmerkung 2.

Nach eben diesen Zeichensysteme kann man auch alle Zahlen in jedem andern Zahlensysteme bezeichnen; wobey man nur darauf zu achten hat, wie viel Einheiten jeder Ordnung Eine Einheit der nächst höhern Ordnung ausmachen. So ist z. B.

nach der Dekadik		nach der Tetraktik
1	=	1
2	=	2
3	=	3
4	=	10
5	=	11
6	=	12
7	=	13
8	=	20
16	=	100
64	=	1000

§. 40.

Erklärung.

Eine bezeichnete Zahl richtig aussprechen, heißt Numeriren. Das Numeriren ist kein Rechnen (§. 9); und beruhet bloß auf §. 38.

III.

Von den Rechnungsarten.

§. 41.

Erklärung.

Wenn man mehrere Größen zusammen in eine Größe vereinigt, so heißt die letztere Größe die Summe von jenen und jene Größen selbst werden summirende Größen genannt. Die Summe gegebener Größen finden, heißt addiren. Das Zeichen der Addition (+) wird durch das Wort plus ausgesprochen.

§. 42.

Zusatz.

Gleiches, zu Gleichem addirt, giebt Gleiches (21); also Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt Ungleiches (bey dem Größern kömmt mehr heraus, als bey dem Kleinern): ferner Ungleiches, zu Gleichem addirt, giebt auch Ungleiches (wo man mehr hinzu addirt muß auch mehr herauskommen); also um so mehr giebt das Größere, zum Größern addirt, mehr als das Kleinere zum Kleinern.

§. 43.

Forderungssatz.

Zahlen, wovon keine größer als 9 ist, zusammen zu zählen, gleichen, abzuzählen, wie viel Einheiten, die eine mehr enthalte, als die andere.

§. 44.

Aufgabe.

Ganze Zahlen zu addiren; die nicht entgegengesetzt sind.

Auflösung. Man schreibt die gegebenen Zahlen so untereinander, daß immer die Einheiten von einerley Ordnung in einer Kolumne untereinander zu stehen kommen. Alsdann fängt man rechter Hand an, zählt die Einheiten in jeder Kolumne zusammen, und setzt sie darunter. So oft man in einer Kolumne 10 Einheiten zusammen hat, setzt man dafür eine Einheit in die nächstfolgende höhere Stelle, und in die erstere nur das übrige.

Beweis. Weil in keiner einzelnen Stelle eine Zahl vorkömmt, die größer ist, als 9, so ist das beschriebene Verfahren möglich (§. 43.); und weil man dadurch alle Einheiten der gegebenen Zahlen in eine Zahl vereinigt; so ist diese letztere die verlangte Summe (§. 41.).

§. 45.

Zusatz 1.

Wenn a überhaupt irgend eine Zahl, und b irgend eine andere bedeutet, so ist die Summe beider Zahlen $= a + b$ (§. 41. 33 22.). Die Summe von a und a ist $= a + a$, oder kürzer $= 2\,a$. Eine Zahl (wie hier die 2), welche angiebt, wie viel mal eine andre genommen sey, heißt ein Koefficient.

§. 46.

§. 46.

Zusatz 2.

Negative Zahlen werden auf eben die Art wie positive, zusammengezählt. Z. B.

-418	$-a$	$-a$
-9276	$-b$	$-a$
-9694	$-a+(-b)$	$-2a$

Die Summe negativer Zahlen muß auch negativ seyn, denn sie ist ein Inbegriff von lauter negativen Einheiten.

§. 47.

Aufgabe.

Entgegengesetzte ganze Zahlen zu addiren.

Auflösung. Man hebe von der einen so viel auf, als die andere beträgt, und nehme den bleibenden Ueberschuß, so hat man die verlangte Summe.

Beweis. Wenn man Zahlen addiren soll, so soll man sie zu Einer Zahl vereinigen (§. 41.). Wenn man aber entgegengesetzte Zahlen vereinigt; so hebt jede so viel, als sie selber beträgt, von der andern auf (§. 31.). Der bleibende Ueberschuß also ist das, was durch die Vereinigung herauskömmt, d. i. er ist die verlangte Summe.

§. 48.

Zusatz.

Wenn also die entgegengesetzten, summirenden Zahlen gleich sind, so ist die Summe Null.

Ist die positive größer, so ist die Summe positiv; ist die negative aber größer, so ist auch die Summe negativ. Z. B.

+8	+8	−8	+a	+9a	−16a
−8	−5	+5	−a	−7a	+12a
0	+3	−3	0	+2a	−4a

§. 49.

Erklärung.

Dasjenige, was eine Größe mehr enthält, als eine andere, heißt der Unterschied (die Differenz, das Komplement). Den Unterschied zweyer Größen finden, heißt subtrahiren; wobey denn die gefundene Differenz auch der Rest genannt wird. Diejenige Größe, wovon subtrahirt wird, heißt der Minuendus, und diejenige, welche abgezogen wird, der Subtrahent. Das Zeichen der Subtraction (—) wird durch das Wort minus ausgesprochen.

§. 50.

Zusatz.

Gleiches, von Gleichem abgezogen, giebt Gleiches (21); Also, Gleiches von Ungleichem abgezogen, giebt Ungleiches (von dem Größern bleibt mehr als von dem Kleinern), und Ungleiches von Gleichem abgezogen giebt auch Ungleiches (wo man mehr wegnimmt, da bleibt weniger).

§. 51.

Aufgabe.

Von einer ganzen Zahl eine kleinere abzuziehen, wenn sie nicht entgegengesetzt sind.

Auf-

Auflösung. Man schreibe den Subtrahenten so unter den Minuendus, daß die Einheiten von einerley Ordnung unter einander zu stehen kommen, fange alsdann rechter Hand an, zähle bey jeder Ordnung ab, wie viel Einheiten im Minuendus mehr sind als im Subtrahenten, und schreibe diese drunter. Finden sich in einer Ordnung mehr Einheiten im Subtrahenten als im Minuendus; so nimmt man von der nächst höhern Ordnung des Minuendus Eine Einheit weg, und setzt dafür zu der erstern zehn hinzu; welches man das Borgen nennt, nnd bey der Ordnung, von der man borgt, durch einen Punkt anzeigt.

Beweis. Weil in keiner Ordnung eine Zahl vorkömmt, die > 9 wäre, so ist das vorgeschriebene Verfahren möglich (§. 43.); und weil dadurch alle Einheiten von jeder Ordnung gefunden werden, die der Minuendus mehr enthält, als der Subtrahent, so wird der gesuchte Rest gefunden (§. 49.).

§. 52.

Zusatz 1.

Wenn überhaupt von irgend einer Zahl a irgend eine andre b abgezogen werden soll; so ist der Rest $= a - b$ (§ 49. 22.). Wird a von 4a abgezogen, so ist der Rest $= 4a - a$, oder kürzer $= 3a$.

§. 53.

Zusatz 2.

Negative Zahlen werden eben so, wie positive, von einander abgezählt; und der Rest muß, in dem gesetzten Falle, auch negativ seyn. Denn da der Minuendus lauter negative Einheiten enthält, der Rest aber aus den Einheiten besteht, welche der Minuendes mehr enthält, als der Subtrahent, so ist der Rest negativ. Z. B.

— 89653	— a	— 5a
— 899	— b	— 3a
— 88754	— a — (—b)	— 2a

§. 54.

Lehrsatz.

Eine positive Zahl wird abgezogen, wenn man sie als negativ betrachtet und hinzusetzt; und eine negative wird abgezogen, wenn man sie als positiv betrachtet und hinzusetzt.

Beweis. Der Minuendus mag beschaffen seyn, wie er will, so kann er immer so betrachtet werden, als wenn der Subtrahent, positiv und negativ genommen, (d. i. nichts §. 31) zu ihm hinzugesetzt wäre. Wenn man also den Subtrahenten, positiv genommen, abzieht; so bleibt der Minuendus mit dem negativen Subtrahenten; und wenn man den Subtrahenten, negativ genommen abzieht, so bleibt der Minuendus mit dem positiven Subtrahenten.

Oder,

Oder, um es kürzer auszudrücken, es sey a der Minuendus und b der Subtrahent. So ist $a = a + (+b) + (-b)$, (§. 31.). Wenn man also $+b$ wegnimmt; so bleibt $a + (-b)$, und wenn man $-b$ wegnimmt, so bleibt $a + (+b)$.

§. 55.

Zusatz.

Das Positive wegnehmen ist also eben so viel, als das Negative setzen; und das Negative wegnehmen so viel als das Positive setzen.

§. 56.

Jede ganze Zahl von jeder andern abzuziehen.

Auflösung. Wenn der Subtrahent positiv ist, so nehme man ihn negativ und addire ihn hinzu; und wenn er negativ ist, so nehme man ihn positiv und addire ihn hinzu.

Beweis. Wie dies geschehen könne, erhellet aus §. 44—48, und daß man dadurch den gesuchten Rest finde, aus §. 54, oder §. 55.

§. 57.

Zusatz 1.

Wenn eine größere positive Zahl von einer kleinern positiven abzuziehen ist; so besteht der Rest aus dem Ueberschusse der größern und ist negativ. Und wenn eine größere negative Zahl von einer kleinern negativen abgezogen werden soll, so besteht der Rest ebenfalls aus dem Ueberschusse der größern, ist aber positiv. Soll eine

Zahl von Null abgezogen werden, so ist der Rest dieselbe Zahl mit dem entgegesetzten Zeichen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 9 \\ \hline -4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24\,a \\ 25\,a \\ \hline -a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -15 \\ -18 \\ \hline +3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -7a \\ -9a \\ \hline +2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \\ \hline -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ -4 \\ \hline +4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ a \\ \hline -a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ -a \\ \hline +a \end{array}$$

§. 58.

Zusatz 2.

Bey entgegengesetzten Zahlen ist der Rest immer von einerley Beschaffenheit mit dem Minuendus, dieser mag größer oder kleiner seyn, als der Subtrahent. Z. B.

$$\begin{array}{r} +8 \\ -5 \\ \hline +13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +8 \\ -9 \\ \hline +17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \\ +4 \\ \hline -10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \\ +8 \\ \hline -14 \end{array}$$

§. 59.

Lehrsatz.

1) Wenn man zu der Summe zweyer Zahlen ihre Differenz hinzu addirt, so bekömmt man das Duplum der größern von beiden Zahlen; 2) wenn man aber von der Summe derselben ihre Differenz abzieht, so giebt dieses das Duplum der kleinern von beiden.

Be

Beweis. 1) Man setze zwey Zahlen, $a > b$. Wenn man nun zu der Summe derselben, $a + b$, ihre Differenz, $a - b$, hinzuaddiren soll, und man addirt zuvörderst a hinzu, so entsteht $2a + b$. Alsdann aber hat man um b zuviel hinzugesetzt, weil nur $a - b$ hinzugesetzt werden sollte. Man muß also noch b abziehen, und so erhält man $2a$.

Beweis. 2) Wenn man von $a + b$ die Differenz $a - b$ abziehen soll, und zieht a ab, so behält man b, hat aber alsdann um b zu viel abgezogen, weil nur $a - b$ subtrahirt werden sollte. Man muß also noch b hinzusetzen, erhält also $2b$.

§. 60.

Zusatz 1.

Das nämliche erhellet wenn man, statt der Differenz $a - b$ setzt $a + (-b)$ §. 55.

§. 61.

Zusatz 2.

Die halbe Summe und halbe Differenz zusammen geben die größere von beiden Zahlen und die halbe Differenz von der halben Summe abgezogen giebt die kleinere von beiden. Z. B. $\frac{1}{2}(8+6) + \frac{1}{2}(8-6) = 8$, oder $\frac{1}{2}(8+6) - \frac{1}{2}(8-6) = 6$.

§. 62.

Erklärung.

Eine Größe mit einer Zahl **multipliciren** heißt, eine andre Größe finden, worin die erstere

so

so vielmal enthalten ist, als Eins in jener Zahl. Die Größe, die multiplicirt wird, heißt das Multiplicandum, die Zahl, womit man multiplicirt, der Multiplicator, und das, was herauskömmt, das Produkt. Multiplicandum und Multiplicator werden auch Faktoren des Produkts, und dieses wird auch das Faktum genannt, (obgleich diese Ausdrücke, so wie auch der Ausdruck, Produkt, ursprünglich auf einer falschen Vorstellung beruhen). Das Zeichen der Multiplication, ist: (×), oder: (.).

§. 63.

Zusatz 1.

Eine Größe wird also mit einer gegebnen Zahl multiplicirt, wenn man sie so vielmal nimmt, als diese Zahl anzeigt. Wenn demnach diese Zahl eine ganze ist, so wird das Multiplicandum so vielmal größer gemacht, als dieselbe Eins enthält.

§. 64.

Zusatz 2.

Gleiches mit gleichem multiplicirt, giebt Gleiches (21.). Also Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Ungleiches (das Größere giebt mehr als das Kleinere); und Gleiches mit Ungleichem multiplicirt, giebt auch Ungleiches (wo man mit dem Größern multiplicirt, kömmt mehr heraus). Also noch viel mehr muß das Größere, mit dem Größern multiplicirt, mehr geben, als das Kleinere mit den Kleinern.

§. 65.

§. 65.

Lehrsatz.

1) Eine Größe wird multiplicirt, wenn man alle ihre Theile einzeln multiplicirt, und dann alles zusammen nimmt. Eben so wird 2) mit einer Zahl multiplicirt, wenn man mit jedem ihrer Theile einzeln multiplicirt, und dann alles zusammen nimmt.

Beweis. 1. 2. Jede Größe ist mit allen ihren Theilen zusammen genommen einerley und ihnen gleich (§. 19). Also in beyden Fällen wird das ganze Multiplicandum so vielmal genommen, als der ganze Multiplicator anzeigt.

§. 66.

Zusatz.

Eine Zahl wird mit 10, 100, 1000 u. s. f. multiplicirt, wenn man eine, zwey, drey u. s. f. Nullen anhängt (65. 63. 38).

§. 67.

Aufgabe.

Eine ganze Zahl mit einer andern ganzen zu multipliciren, wenn keine größer als 9 ist.

Auflösung. Zähle das Multiplicandum, so vielmal genommen, als der Multiplicator anzeigt zusammen.

Beweis. §. 63. §. 43. — Um diese Operation zu verkürzen, muß man sich das sogenannte Einmaleins, oder die pythagorische Tafel, ein für allemal merken.

§. 68.

Aufgabe.

Jede ganze Zahl mit jeder andern ganzen zu multipliciren.

Auflösung. 1. Wenn das Multiplicandum aus mehrern Ziffern besteht, der Multiplicator aber nur aus einer; so fängt man von der niedrigsten Ziffer des Multiplicandums an, multiplicirt jede für sich, und setzt das Produkt darunter: so oft man aber bey dem Produkte einer Ziffer 10 Einheiten bekömmt, läßt man diese weg, und rechnet dafür zum Produkte der nächst höhern Eine Einheit hinzu.

2) Wenn auch der Multiplicator aus mehrern Ziffern besteht, so multiplicirt man zuerst, auf die eben beschriebene Art, mit der niedrigsten Ziffer desselben, dann eben so mit der nächst höhern, und so fort. Dabey muß man nur darauf achten, was für Einheiten jede Ziffer bedeute, um den Werth des Produkts richtig zu bestimmen. Am Ende addirt man alles zusammen.

Beweis. Da kein Factor eine Ziffer enthält, die mehr als neun Einheiten anzeigt, so ist das beschriebene Verfahren möglich (67); und das gesuchte Produkt muß dadurch gefunden werden; denn man multiplicirt alle Theile des Multiplicandums mit jedem Theile des Multiplicators und nimmt am Ende alles zusammen (65.).

§. 69.

Zusatz.

Bey allgemeinen Zahlen wird das Produkt dadurch bezeichnet, daß man die Factoren aneinder hängt. So ist $a \times b = ab$, und $a \times b \times c = abc$. Die aus mehrern Theilen bestehenden Factoren, werden nach den eben gegebenen Regeln multiplicirt. Z. B.

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ d + f \\ \hline ad + bd + cd \\ af + bf + cf \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Produkt} = ad + bd + cd + af + bf + cf$$

§. 70.

Lehrsatz.

1) Das Produkt hat höchstens so viel Ziffern als Multiplicandum und Multiplicator zusammen genommen haben. 2) Es hat aber auch das Produkt wenigstens so viel Ziffern, als Multiplicandum und Multiplicator zusammen, weniger eine.

Beweis 1. Wenn das Multiplicandum n Ziffern und der Multiplicator m Ziffern hat, so setze man den kleinsten Multiplicator mit $m + 1$ Ziffern, das ist eine 1 mit m Nullen, und multiplicire mit diesem. Alsdann besteht das Produkt aus den Ziffern des Multiplicandums mit m angehängten Nullen (66), also aus $n + m$

Ziffern. Kein Multiplicator mit m Ziffern aber kann ein größeres Produkt geben (§. 64.).

Beweis 2. Wen das Multiplicandum n Ziffern, und der Multiplicator m Ziffern hat, so ist dieser der kleinste, wenn er aus einer 1 mit (m — 1) Nullen besteht. Wenn man alsdann mit ihm multiplicirt, so besteht das Produkt aus den Ziffern des Multiplicandums mit (m — 1) angehängten Nullen (66) also aus n + (m — 1) Ziffern. Jeder andere Multiplicator mit m Ziffern kann kein kleineres Produkt geben (64).

§. 71.

Zusatz.

Ein Produkt aus drey Factoren a, b, c hat höchstens so viel Ziffern, als diese drey Factoren zusammen, und wenigstens so viel weniger zwey. Denn $ab = a \times b$ hat höchstens so viel Ziffern als a und b zusammen, und $abc = ab \times c$ höchstens so viel, als ab und c zusammen, also höchstens so viel als a, b, und c zusammen. Imgleichen hat $ab = a \times b$ wenigstens so viel Ziffern als a und b weniger eine, und $abc = ab \times c$ wenigstens so viel als ab und c weniger eine, mithin wenigstens so viel als a, b und c, weniger zwey.

Nach derselben Regel geht es fort bey noch mehr als drey Factoren.

§. 72.

§. 72.

Erklärung.

Mit einem **negativen Multiplicator** multipliciren heißt, das Multiplicandum in eine Größe von entgegengesetzter Art verwandeln, und es dann multipliciren.

§. 73.

Lehrsatz.

Entgegengesetzte Factoren geben ein negatives Produkt nicht entgegengesetzte ein positives.

Beweis. Wenn I) das Multiplicandum, a, positiv ist; so ist der Multiplicator, b, entweder auch positiv, oder er ist negativ. Wenn er 1) positiv ist, so besteht das Produkt aus a, so vielmal genommen als b anzeigt (63), also aus lauter positiven Theilen und ist also positiv; $(+a) \times (+b) = +ab$. Ist 2) b negativ, so muß man a erst negativ machen und dann so viel mal nehmen, als b anzeigt (72); also das Produkt besteht aus lauter negativen Theilen, und ist also negativ: $(+a) \times (-b) = -ab$. Wenn II) das Multiplicandum a, negativ ist, so kann der Multiplicator, b, wiederum 1) positiv seyn. Alsdann besteht das Produkt aus dem Multiplicandum, so viel mal genommen als b anzeigt (63), also, weil das Multiplicandum negativ ist, aus lauter negativen Theilen, und ist also negativ; $(-a) \times (+b) = -ab$. Der Multiplicator, b, kann 2) negativ seyn. Alsdann muß man das

Multiplicandum erst positiv machen, und dann so viel mal nehmen, als b anzeigt, (72.); also das Produkt bestehet aus lauter positiven Theilen und ist also ebenfalls positiv; $(-a) \times (-b) = +ab$.

§. 74.

Erklärung.

Eine Größe mit einer Zahl **dividiren** heißt, eine andre Größe finden, welche in der erstern so vielmal enthalten ist, als Eins in jener Zahl. Die Größe, welche dividirt wird, heißt das **Dividendum**, die Zahl, womit man dividirt, der **Divisor**, und die Größe, welche durch die Division gefunden wird, der **Quotient**. Das Zeichen der Division ist dieses (:).

§. 75.

Zusatz 1.

Wenn man den Quotienten so viel mal nimmt, als der Divisor anzeigt (oder ihn mit dem Divisor multiplicirt), so muß das Dividendum wieder herauskommen, und diejenige Größe ist allemal der Quotient, die, mit dem Divisor multiplicirt, das Dividendum wieder herstellt.

§. 76.

Zusatz 2.

Division und Multiplication heben sich also einander auf (75.) und sind einander grade entgegengesetzt (74. 62.). Wenn man also eine Größe mit einerlei Zahl multiplicirt und dividirt, so

so bleibt sie unverändert. Z. B. $6 \times 3 : 3 = 6$, und $6 : 3 \times 3 = 6$.

§. 77.

Zusatz 3.

Eine Multiplication aufheben, ist also so viel als dividiren: ab, durch b dividirt, giebt a, und abcd, durch ac dividirt, giebt bd. Ingleichen eine Division aufheben, ist so viel als multipliciren, a : b, durch b multiplicirt, giebt a.

Auch wird eine Größe durch die Division mit einer ganzen Zahl so vielmal kleiner gemacht, als diese Zahl Eins enthält.

§. 78.

Zusatz 4.

Wenn eine Zahl rechter Hand am Ende Nullen hat, und man streicht, eine, zwey, drey u. s. f. von diesen Nullen aus, so ist das so viel, als wenn man mit 10, 100, 1000 u. s. f. dividirt (77. 66.).

§. 79.

Zusatz 5.

Gleiches, mit Gleichem dividirt, giebt Gleiches (21.); also Ungleiches, mit Gleichem dividirt, giebt Ungleiches, (das Größere giebt mehr als das Kleinere.)

§. 80.

Lehrsatz.

Bey der Multiplication ist die Ordnung der Factoren gleichgültig; $a \times b = b \times a$, und $a \times b \times c = a \times c \times b$.

Beweis. Wenn ab nicht $= ba$ wäre; so sey $ab > ba$. Alsdann ist $ab : b > ba : b$. (79.). Nun aber ist $ab : b = a$, und $ba : b = a$ (77.); also wäre $a > a$; gegen §. 19.

Eben so muß $abc = acb$ seyn. Denn $bc = cb$, also $a \times bc = a \times cb$, also $abc = acb$.

§. 81.

Lehrsatz.

Eine Zahl, a, wird durch eine andere, b, dividirt, wenn man diejenige Zahl, x sucht, welche angiebt, wie vielmal der Divisor, b, im Dividendum, a, enthalten ist.

Beweis. Wenn b in a so vielmal enthalten ist, als x anzeigt, so ist $b \times x = a$; folglich $x \times b = a$ (80.), folglich x der gesuchte Quotient (75.).

§. 82.

Lehrsatz.

Jeder Quotient ist ein Bruch, wozu das Dividendum den Zähler und der Divisor den Nenner ausmacht.

Beweis. Es muß $n : m = \frac{n}{m}$ seyn. Denn der Bruch $\frac{n}{m}$ enthält n solche Einheiten, deren m auf ein Ganzes gehen (28.). Wenn man also jede Einheit des Bruches m mal nimmt, so bekommt man n Ganze, daß ist (65.), $\frac{n}{m} \times m = n$. Folglich ist $\frac{n}{m}$ der richtige Quotient (75.).

§. 83.

Zusatz.

Auch umgekehrt: jeder Bruch bedeutet so viel als ein Quotient, wenn man den Zähler als Dividendum und den Nenner als Divisor betrachtet.

§. 84.

Lehrsatz.

Wird das Dividendum so vielmal größer, als irgend eine ganze Zahl, n, anzeigt, so wird auch der Quotient eben so vielmal größer, wenn der Divisor einerley bleibt.

Beweis. Wenn a: b = x ist, so muß na: b = nx seyn. Denn, weil a: b = x ist, so ist a = bx (75), folglich na = nbx (64), folglich na: b = nx (79. 77).

§. 85.

Zusatz 1.

So vielmal das Dividendum kleiner wird, so vielmal wird auch der Quotient kleiner, wenn der Divisor einerley bleibt.

§. 86.

Zusatz 2.

Der gegebne Beweis läßt sich auch anwenden, wenn n einen Bruch vorstellt.

§. 87.

Lehrsatz.

Wenn das Dividendum unverändert bleibt, der Divisor aber so vielmal größer gemacht wird,

 als

als irgend eine ganze Zahl, n, anzeigt; so wird der Quotient eben so vielmal kleiner.

Beweis. Wenn a : b = x ist; so ist a : nb = x : n. Denn, weil a : b = x ist, so ist a = bx (75), also a = nbx : n (76), also a : nb = x : n (79. 77.).

§. 88.

Zusatz 1.

So vielmal der Divisor kleiner wird, so vielmal wird der Quotient größer, wenn das Dividendum einerley bleibt.

§. 89.

Zusatz 2.

Der gegebne Beweis kann auch angewendet werden, wenn n irgend einen Bruch bedeutet.

§. 90.

Lehrsatz.

1) Wenn man beide, Dividendum und Divisor, mit einerley Zahl, n, multiplicirt, so wird der Quotient nicht geändert. 2) Eben das gilt, wenn Dividendum und Divisor mit einerley Zahl dividirt werden.

Beweis. 1. Wenn a : b = x ist, so ist na : nb = nx : n (§. 84. 87.) = x (76.).

Beweis. 2. Erhellet eben so.

§. 91.

§. 91.
Zusatz.

Zähler und Nenner eines Bruches kann man mit jeder beliebigen Zahl multipliciren oder dividiren, ohne den Werth des Bruches zu ändern, wenn man nur beyde mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt (83.).

§. 92.
Lehrsatz.

Wenn das Dividendum in mehrere Theile getheilt ist, so kann man auch jeden Theil einzeln dividiren, und dann alles zusammen nehmen.

Beweis. Jede Größe ist mit allen ihren Theilen zusammen genommen einerley (19). Wenn man also gefunden hat, wie vielmal der Divisor in allen Theilen des Dividendum enthalten ist, so hat man auch gefunden, wie vielmal er in dem Dividendum selbst enthalten ist.

§. 93.
Aufgabe.

Eine ganze Zahl, die höchstens aus zwey Ziffern besteht, durch eine andre, die nur eine Ziffer hat, zu dividiren.

Auflösung. Man zähle den Divisor so oft zusammen, bis das Dividendum herauskömmt, oder doch so viel davon, daß der übrige Rest nicht mehr so viel beträgt, als der Divisor. Wenn kein solcher Rest bleibt, so geht der Divisor im Dividendum auf, und die Zahl, die angiebt,

wie vielmal er darin enthalten sey, ist der Quotient. Wenn aber ein solcher Rest bleibt, so muß man zuvörderst angeben, wie vielmal der Divisor im Dividendum stecke, und dann den gebliebenen Rest noch durch den Divisor dividiren, und dies noch hinzusetzen, welches denn einen Bruch giebt, wozu der gedachte Rest den Zähler und der Divisor den Nenner ausmacht. z. B.

$$\begin{array}{r|l} 6)\ 24 & 4. \\ 24 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6)\ 25 & 4\tfrac{1}{6}. \\ 24 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Beweis. Die Möglichkeit dieser Auflösung erhellet aus §. 43; ihre Richtigkeit für den ersten Fall aus §. 81., und für den andern aus §. 81. und 92 — Zur Abkürzung der Operation dient das Einmaleins.

§. 94.

Aufgabe.

Jede ganze Zahl mit jeder andern ganzen zu dividiren.

Auflösung. Das Dividendum ist entweder kleiner oder eben so groß oder größer als der Divisor.

1) Wenn das Dividendum kleiner ist, als der Divisor, so ist der Quotient ein Bruch; das Dividendum ist der Zähler und der Divisor der Nenner.

2) Wenn das Dividendum dem Divisor gleich ist, so ist dieser in jenem grade einmal enthalten, und der Quotient ist 1.

3) Wenn

3) Wenn das Dividendum größer ist, als der Divisor, so bestehet es entweder aus eben so viel oder aus mehr Ziffern als der Divisor.

a) Im ersten Falle suche man, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten Ziffer des Dividendums enthalten sey. Mit der Zahl, die das anzeigt, multiplicire man den Divisor. Wenn alsdann grade das Dividendum herauskömmt, so ist gedachte Zahl der Quotient; kömmt mehr heraus, so hat man den Quotienten zu groß genommen, und man muß ihn vermindern; kömmt aber weniger heraus, so beträgt das übrige vom Dividendum entweder weniger als der Divisor oder nicht. Im letztern Falle hat man den Quotienten zu klein genommen und muß ihn vermehren, im erstern Falle muß man das, was vom Dividendum noch übrig ist, noch durch den Divisor dividiren und (als Bruch) zum Quotienten hinzusetzen. Z. B.

$$925)317|=\frac{317}{925} \qquad 216)\frac{648}{\underline{648}}|=3 \qquad 216)\frac{651}{\underline{648}}|=3\frac{3}{216}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 3$$

b) Wenn das Dividendum mehr Ziffern hat als der Divisor, so giebt es wieder zwey Fälle. Wenn man von den höchsten Ziffern des Dividendums so viele nimmt als der Divisor hat, so machen diese für sich allein eine Zahl aus, die entweder aa) größer oder eben so groß als der Divisor, oder bb) kleiner als derselbe ist.

aa)

aa) Im ersten Falle nehme man zuvörderst die gedachten Ziffern des Dividendums, und suche, wie bey Nr. a, wie vielmal der Divisor darin enthalten sey. An den gefundenen Quotienten aber muß man noch so viel Nullen anhängen, als vom Dividendum noch Ziffern übrig sind. Hiernächst nehme man den bleibenden Rest, setze die nächstfolgende Ziffer des Dividendums dazu, und verfahre wieder eben so. Dies Verfahren setze man so lange fort, bis keine Ziffer vom Dividendum mehr übrig ist, und addire am Ende alle einzelne Quotienten zusammen. Mit einem etwa bleibenden Reste verfährt man, wie gewöhnlich.

bb) Im andern Falle verfährt man übrigens völlig eben so, nur daß man gleich von den höchsten Ziffern des Dividendums eine mehr nimmt, als der Divisor hat, und zusieht, wie vielmal der Divisor darin enthalten sey. Dies erkennt man, wenn man zuerst berechnet, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in den beiden höchsten Ziffern des Dividendums enthalten sey, und übrigens wie bey Nr. a verfährt. Z. B.

	7379	200	27781	800
34)	68 : :		34) 272 : ·	
	57 ·		58 :	
34)	34 :	10	34) 34 :	10
	239		241	
34)	238	7	34) 238	7
	1	$217\frac{1}{34}$	3	$817\frac{3}{34}$

Beweis 1. §. 82. Beweis 2. §. 81. Bew. 3. a. §. 93. 81. Bew. 3. b. Ebendaselbst und §. 92.

Rechnungsvortheile hiebey werden am besten mündlich vorgetragen.

§. 95.

Lehrsatz.

Wenn Dividendum und Divisor nicht entgegengesetzt sind, so ist der Quotient positiv, wenn sie aber entgegengesetzt sind, so ist er negativ.

Beweis. 1) Wenn Dividendum und Divisor positiv sind, so ist auch der Quotient positiv. $(+ab) : (+a) = +b$. Wollte man den Quotienten negativ nehmen, so wäre $(-b) \times (+a) = (-ab)$ (73), welches gegen §. 75. streitet.

2) Wenn Dividendum und Divisor negativ sind, so ist der Quotient auch positiv. $(-ab) : (-a) = (+b)$. Wollte man $(-b)$ zum Quotienten nehmen, so wäre $(-b) \times (-a) = +ab$ (73.) gegen §. 75.

3) $(+ab) : (-a) = (-b)$. Denn ein positiver Quotient, b, würde, mit dem negativen Divisor, $-a$, multiplicirt, das Produkt $-ab$ geben (73.), welches unrichtig wäre, §. 75.

4) $(-ab) : (+a) = (-b)$. Setzte man den Quotienten $+b$; so hätte man $(+b) \times (+a) = +ab$ (73.), welches nicht seyn kann (75.).

§. 96.

Erklärung.

Wenn eine Zahl, a, in einer andern, b, aufgeht, so wird b von a gemessen, und a ist ein Maaß für b. Eine Zahl, die ein Maaß für zwey oder mehrere andere ist, heißt ein gemeines Maaß dieser andern. Zahlen die kein gemeines Maaß haben, sind relative Primzahlen, und eine Zahl, die gar keine andre Zahl zum Maaße hat, ist eine absolute Primzahl. Alle Zahlen, die keine absolute Primzahlen sind, heissen zusammengesetzte Zahlen.

§. 97.

Lehrsatz.

Wenn eine Zahl, a, in einer andern, b, aufgeht, so muß jede dritte Zahl, n, die in a aufgeht, auch in b aufgehen.

Beweis. Weil a in b aufgeht, so bestehet b aus a, ein oder mehr mal genommen (93.); und weil nun n in a aufgeht, so gehet n in allen Theilen von b, folglich in b selber auf (92.)

§. 98.

Lehrsatz.

Wenn n in a, aber nicht in x aufgeht, so geht n auch in $(a + x)$ nicht auf.

Beweis. $(a + x)$ wird durch n dividirt, wenn man zuerst a, dann x durch n dividirt und dann alles zusammen nimmt (92.). Weil nun aber

aber die Division in a aufgehet, bey x aber ein Rest bleibt, wie vorausgesetzt ist, so bleibt bey der Division des ganzen Dividendums ein Rest, oder, n geht in (a + x) nicht auf.

§. 99.

Zusatz.

Eine Zahl, die in dem ganzen Dividendum und in einem Theile desselben aufgehen soll, muß auch in dem andern Theile desselben aufgehen.

§. 100.

Lehrsatz.

Wenn der Divisor im Dividendum nicht aufgeht, wenn aber der bleibende Rest im Divisor aufgeht, so geht 1) gedachter Rest auch im Dividendum auf, und er ist 2) die größte Zahl, die im Divisor und Dividendum zugleich aufgehen kann.

Beweis 1. Der Divisor heisse n, der Theil des Dividendums, worin er aufgeht, a, der bleibende Rest, x, das ganze Dividendum also (a + x). Wenn nun der bleibende Rest x im Divisor n aufgeht, so geht er auch in a auf (97.). Da er überdem in sich selbst aufgeht, so gehet er in dem ganzen Dividendum (a + x) auf (92.)

Beweis 2. Es sey y > x; so kann y nicht im Divisor und Dividendum zugleich aufgehen. Denn, wenn die Zahl y im Divisor n aufginge, so müßte sie auch in a aufgehen (97.), und wenn sie dann auch im ganzen Dividendum aufgehen

sollte, so müßte sie auch in x aufgehen (99.), welches unmöglich ist, weil $y > x$ ist.

§. 101.

Zusatz 1.

Aus Bew. 2. erhellet: Wenn irgend eine Zahl (y) in zwey andern ((a + x) und n) aufgehen soll, so muß sie auch in dem größten gemeinen Maaße dieser beiden andern (in x) aufgehen.

§. 102.

Zusatz 2.

Wenn bey einer Division ein Rest bleibt, so muß alles, was im Divisor und Dividendum zugleich aufgehen soll, auch in gedachtem Reste aufgehen.

§. 103.

Zusatz 3.

Wenn bey einer Division ein Rest bleibt, so muß jede Zahl, die in diesem Reste und im Divisor aufgeht, auch im Dividendum aufgehen.

§. 104.

Lehrsatz.

Wenn im Dividendum, a, der Divisor, b, nicht aufgeht, sondern ein Rest, c, bleibt, so ist überhaupt das größte gemeine Maaß für c und b, auch das größte für b und a.

Be-

Beweis. Es sey x das größte gemeine Maaß für c und b, und y > x; so kann y nicht in b und a zugleich aufgehen. Sonst ginge y auch in c auf (102.), wäre also ein gemeines Maaß für c und b, und zwar grösser als das größte, weil y > x ist; welches sich widerspricht.

§. 105.

Aufgabe.

Das größte gemeine Maaß zweyer Zahlen, a und b, zu finden.

Auflösung. 1) Die grössere Zahl, a, dividire durch die kleinere, b. Geht dies auf, so ist b das größte gemeine Maaß.

2) Bleibt ein Rest, c, so dividire mit c den vorigen Divisor, b. Geht dies auf, so ist c das größte gemeine Maaß für a und b.

3) Bleibt abermals ein Rest, d, so dividire man wieder mit d in den vorigen Divisor, c; und wiederhole dieses Verfahren so lange, bis ein Rest kömmt, der in dem nächstvorhergehenden Divisor aufgeht: so ist dieser Rest das gesuchte größte gemeine Maaß für a und b.

4) Bliebe endlich 1 zum Rest, so haben a und b kein gemeines Maaß und sind also unter sich Primzahlen.

Beweis 1. Wenn b in a aufgeht, so ist sie, weil sie auch in sich selbst aufgeht, ein gemeines Maaß (96.) und zwar das größte, weil keine grössere Zahl in b aufgehen kann.

Beweis 2. Wenn der Rest c in b aufgehet, so ist er ein gemeines Maaß für b und a (100. 96.) und zwar das größte (100.).

Beweis 3. Wenn der zuletzt gebliebene Rest, d, in dem letzten Divisor, c, aufgehet, so ist er das größte gemeine Maaß für d und c (Bew. 1.); folglich auch für c und b (104.) folglich auch für b und a (104.).

Beweis 4. Wenn 1 zum Reste bliebe, so würde 1 das größte seyn, was in a und b aufginge. Weil aber 1 keine Zahl ist (2.), so haben a und b kein gemeines Maaß (96.).

§. 106.

Aufgabe.

Es sind drey Zahlen, a, b, c, gegeben, man soll ihr größtes gemeines Maaß finden.

Auflösung. Man sucht zuerst das größte gemeine Maaß für die beiden kleinern Zahlen a und b. Dies heisse x. Wenn nun 1) x auch die c mißt, so ist x das größte gemeine Maaß der drey gegebnen Zahlen. Wenn aber 2) x die c nicht mißt, so sucht man das größte gemeine Maaß, y, für x und c, so ist dieses das verlangte.

Beweis. Der erste Fall ist für sich klar. Der andere erhellet so. Da y in x aufgeht, so gehet sie auch in a und b auf (97.), ist also, da sie auch in c aufgeht, ein gemeines Maaß für alle drey gegebne Zahlen. Aber auch das größte. Denn jede Zahl, die a und b messen soll, muß

in x aufgehen (101.), und, wenn sie ein Maaß für alle drey gegebne Zahlen seyn soll, auch in c. Also die größte Zahl, die in x und c zugleich aufgeht, ist auch die größte, die in allen drey gegebenen Zahlen aufgehen kann.

Auf eben die Art wird auch das größte gemeine Maaß für noch mehr als drey Zahlen gefunden.

§. 107.

Aufgabe.

Es sind mehrere Zahlen a, b, c gegeben, man soll eine Zahl finden, die allen gegebnen meßbar ist.

Auflösung. Multiplicire die gegebnen Zahlen ineinander; so ist das herauskommende Produkt die verlangte Zahl.

Beweis. In dem Produkte abc muß jede von den gegebnen Zahlen aufgehen, weil jede ein Faktor desselben ist. Jeder Faktor eines Produkts aber ist in diesem Produkte genau so vielmal enthalten, als der andere anzeigt (62.). So ist $abc = a \times bc$, also a in abc so vielmal enthalten als bc angiebt.

§. 108.

Aufgabe.

Noch eine kleinere Zahl von der verlangten Eigenschaft zu finden, weil die gegebnen Zahlen keine Primzahlen zu einander sind.

Auflösung. Verkleinere die gegebnen Zahlen durch ihr größtes gemeines Maaß; und multipli-

tiplicire die herauskommenden Quotienten und das gebrauchte gemeine Maaß in einander, so ist das herauskommende Produkt eine solche Zahl, als verlangt wird.

Beweis. Die gegebnen Zahlen seyen ab, ac, ad, und ihr größtes gemeines Maaß sey a. Wenn man sie damit dividirt, so erhält man die Quotienten b, c, d (77.), und wenn man diese und das gemeine Maaß a in einander multiplicirt, so erhält man das Produkt abcd. Dieses Produkt ist 1) allen gegebnen Zahlen meßbar, weil jede ein Faktor desselben ist (107. 77.) und ist 2) eine kleinere Zahl als das Produkt aus den gegebnen Zahlen selbst. Denn $ab \times ac \times ad = abacad = abcdaa$ (80.) $= abcd \times aa > abcd$.

§. 109.

Zusatz 1.

Wenn eine oder etliche von den gegebnen Zahlen sich mit dem gemeinen Maaße der übrigen nicht messen lassen, so läßt man sie unverändert, und multiplicirt sie mit den Quotienten der übrigen und dem gebrauchten gemeinen Maaße.

§. 110.

Zusatz 2.

Wenn die gefundnen Quotienten wieder ein gemeines Maaß haben, so kann man sie damit nochmal dividiren und alsdann die zuletzt gefundenen Quotienten und die gebrauchten gemeinen

Maaße

Maaße in einander multipliciren. Ließen sich nur einige von den erstgedachten Quotienten durch ein gemeines Maaß messen, so kann man, wie bey §. 109., verfahren.

§. 111.

Erklärung.

Ein Bruch ist ächt, wenn sein Zähler kleiner ist als der Nenner; widrigenfalls ist er unächt. Ein unächter Bruch ist ein eigentlicher, wenn der Nenner im Zähler nicht aufgeht; sonst ist er ein uneigentlicher. Wenn Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so ist der Bruch ein ganzer (Bruch schlechthin), im entgegenstehenden Falle aber ein gebrochner. Gleichnamig werden Brüche genannt, wenn sie einerley Nenner haben; Brüche mit verschiedenen Nennern sind ungleichnamig.

§. 112.

Zusatz 1.

Jeder ächte Bruch ist < 1 (28.); ein unächter eigentlicher Bruch aber bedeutet ein oder mehrere Ganze (28, oder 74), und ein unächter uneigentlicher Bruch enthält ein oder mehrere Ganze nebst einem ächten Bruche; welches man eine vermischte Zahl nennt. Eine vermischte Zahl wird eingerichtet, wenn man sie in einen unächten Bruch verwandelt.

§. 113.

Zusatz 2.

Jeder Bruch wird durch seine kleinsten Zahlen ausgedrückt, wenn man Zähler und Nenner durch ihr größtes gemeines Maaß dividirt (91.).

§. 114.

Aufgabe.

Gegebne Brüche gleichnamig zu machen.

Auflösung. Nimm eine beliebige Zahl zum gemeinschaftlichen Nenner aller gegebnen Brüche an, und mache den Zähler eines jeden eben so vielmal größer oder kleiner, als sein Nenner größer oder kleiner geworden ist.

Beweis. Alle gegebne Brüche bekommen dadurch einerley Nenner, werden also gleichnamig (111), und ihr Werth wird nicht geändert (91.).

§. 115.

Zusatz.

Die Zahl, welche man zum gemeinschaftlichen Nenner annimmt, heißt dann auch der Generalnenner, und die Nenner der gegebnen Brüche werden Specialnenner genannt. Um nun bey jedem gegebnen Bruche zu erkennen, wie vielmal sein Specialnenner in dem Generalnenner enthalten sey, so dividire man mit jenem in diesen hinein; und damit alle diese Divisionen aufgehen und man nicht auf gebrochene Brüche komme, so

wähle

wähle man eine solche Zahl zum Generalnenner, worin alle Speeialnenner aufgehen, entweder nach §. 107., oder, um kleinere Zahlen zu bekommen, nach §. 108.

§. 116.

Erklärung.

Ein Bruch, dessen Nenner 10 oder ein Produkt der 10 in sich selbst ist, heißt ein Decimalbruch.

§. 117.

Zusatz 1.

Der Nenner eines Decimalbruches ist sonach immer 1 mit einer oder mehrern Nullen (66.): und man kennt ihn, wenn man nur weiß, wie viel Nullen er hat. Daher schreibt man bloß den Zähler hin, und schneidet, vermittelst eines Komma, rechter Hand so viel Ziffern von demselben ab, als der Nenner Nullen hat. Hätte der Zähler nicht so viel Ziffern, daß dies anginge, so setzt man noch so viel Nullen vor denselben vor, als dazu hinreichend sind. Z. B. $\frac{314}{10} = 31,4$; $\frac{314}{100} = 3,14$ $\frac{314}{1000} = 0,314$; $\frac{314}{1000000} =$ 0,000314.

§. 118.

Zusatz 2.

An jeden Decimalbruch kann man so viel Nullen anhängen, als man will; oder, wenn er am Ende Nullen hat, soviel davon ausstreichen, als

man gut findet; das ändert seinen Werth nicht (66. 78. 91.). So ist 3,14 = 3,1400000...

§. 119.

Zusatz 3.

Wenn also an einen Decimalbruch auch andre Ziffern angehängt werden, so kann der Werth der schon vorhandenen nicht geändert werden. Was vor dem Komma steht bedeutet immer Ganze, die erste Ziffer nach dem Komma immer Zehntel, die zweyte Hundertel, die dritte Tausendtel u. s. f. es mögen so viele Decimalstellen (worunter man die Ziffern nach dem Komma verstehen mag) da seyn, als man will. Es ist $3,14 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$ und $3,141592 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000}$.

§. 120.

Aufgabe.

Gegebne Brüche zu addiren.

Auflösung. 1) Gemeine Brüche muß man zuvor, wenn sie es nicht schon sind, gleichnamig machen; alsdann ihre Zähler zusammen addiren und den gemeinen Nenner behalten.

2) Decimalbrüche setzt man so untereinander, daß die Ziffern mit dem Komma in einer Kolume untereinander zu stehen kommen, addirt dann alles zusammen, wie ganze Zahlen und setzet in der Summe das Komma in eben die Kolumne in welcher es in den summirenden Zahlen stehet.

Be-

Beweis. 1. Die gleichnamigen Brüche enthalten Einheiten von einerley Art (28) und durch das vorgeschriebene Verfahren werden alle Einheiten, welche die gegebnen Brüche enthalten, in eine Zahl vereinigt, es wird also die gesuchte Summe gefunden (41.).

Beweis. 2. Erhellet eben so, weil, nach dem angezeigten Verfahren, alle Einheiten von einerley Art untereinander zu stehen kommen (119.).

Man soll z. B. die Brüche $\frac{3}{28}$, $\frac{4}{56}$, $\frac{5}{63}$ zusammen addiren. Zuerst sucht man, nach §. 108., einen Generalnenner, um die Brüche gleichnamig zu machen.

7)	28,	56,	63
4)	4	8	9
	1	2	9

$7 \times 4 \times 1 \times 2 \times 9 = 504$

Hiernächst verfährt man weiter, wie §. 114. und 115, vorgeschrieben ist.

504

$\frac{3}{28}$	18	54
$\frac{4}{56}$	9	36
$\frac{5}{63}$	8	40
		130

Also ist die gesuchte Summe $= \frac{130}{504}$. Wenn ferner die Decimalbrüche 3,14; 0,2; 829,0017; 0,000009

0,000009 gegeben sind, so addirt man sie so zusammen

$$\begin{array}{r} 3,14 \\ 0,2 \\ 829,0017 \\ 0,000009 \\ \hline 832,341709 \end{array}$$

§. 121.

Aufgabe.

Gegebne Brüche von einander abzuziehen.

Auflösung. 1) Gemeine Brüche müssen zuvor gleichnamig gemacht werden, wenn sie es nicht sind. Alsdann wird vom Zähler des Minuendus der Zähler des Subtrahenten abgezogen, und der gemeine Nenner behalten.

Es ist $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{7-4}{8} = \frac{3}{8}$.

Allgemein ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

2) Decimalbrüche werden, wie bey §. 120 untereinander geschrieben, und wie ganze Zahlen subtrahirt. Nur muß das Komma in dem Reste in eben der Kolumne zu stehen kommen, worin es in den gegebnen Brüchen stehet. Z. B.

$$\begin{array}{r} 87,900005 \\ 2,0508060 \\ \hline 85,8492044 \end{array}$$

Be-

Beweis 1. 2. Da in beiden Fällen die Einheiten des Subtrahenten von den Einheiten des Minuendus weggenommen werden, so wird der Rest gefunden (49.).

§. 122.

Aufgabe.

Brüche noch auf eine andre Art von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Den Zähler des Minuendus multiplicire mit der Differenz zwischen des Subtrahenten Zähler und Nenner; den Zähler des Subtrahenten multiplicire eben so mit der Differenz zwischen dem Zähler und Nenner des Minuendus: von dem erstern Produkte ziehe das andere ab, so giebt das den Zähler des gesuchten Restes; der Nenner desselben ist das Produkt aus den Nennern des Minuendus und des Subtrahenten.

Beweis.

$$\frac{a}{a+c} - \frac{b}{b+d} = \frac{(ab+ad) - (ab+bc)}{(a+c) \cdot (b+d)}$$

$$(121.) = \frac{ad - bc}{(a+c) \cdot (b+d)}$$

§. 123.

Aufgabe.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Auflösung. 1) Man kann den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl multipliciren und den Nenner behalten.

Es

Es ist $\frac{7}{12} \times 3 = \frac{7 \times 3}{12} = \frac{21}{12}$

2) Man kann auch den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl dividiren und den Zähler behalten.

Es ist $\frac{7}{12} \times 3 = \frac{7}{12 : 3} = \frac{7}{4}$

3. Ein Decimalbruch wird wie eine ganze Zahl multiplicirt; nur muß das Produkt wieder eben so viel Decimalstellen bekommen, als das gegebene Multiplicandum hat.

Es ist $3,14 \times 3 = 9,42$

Beweis 1. Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ ist ein Quotient; der Zähler a ist das Dividendum, und der Nenner b der Divisor (82.). So viel mal aber das Dividendum größer wird, so viel mal wird auch der Quotient größer (84.).

Also $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{a}$ (63.).

Beweis 2. So vielmal der Divisor kleiner wird, so vielmal wird der Quotient größer (88.).

Also ist $\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b : c}$ (77. 36.).

Beweis 3. Erhellet aus Beweis 1 und §. 117.

§. 124.

Aufgabe.

Eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren.

Auflösung. 1) Multiplicire die ganze Zahl durch den Zähler des Bruches und dividire alsdann mit dem Nenner.

$$\text{Es ist } 8 \times \frac{3}{4} = \frac{8 \times 3}{4} = 6.$$

2) Mit einem Decimalbruch, multiplicirt man eine ganze Zahl eben so, als wenn er eine ganze Zahl wäre. Das Produkt bekömmt aber eben so viel Decimalstellen, als der gegebene Bruch hat. Es ist $4 \times 0,00016 = 0,00064$.

Beweis 1. Es ist $\frac{a}{b} = a : b$ (82.);

also $c \times \frac{a}{b} = c \times a : b = ca : b$.

Beweis 2. Erhellet aus Beweis 1 und §. 117.

§. 125.

Zusatz.

Eine ganze Zahl und ein Bruch geben in veränderter Ordnung einerley Produkt. §. 124. 123. 80,

§. 126.

Aufgabe.

Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Auflösung. 1) Dividire mit der ganzen Zahl den Zähler des Bruches, uud behalte den Nenner; oder

2) Multiplicire den Nenner und behalte den Zähler.

Z. B. 1) $\frac{6}{7} : 2 = \frac{6:2}{7} = \frac{3}{7}$ 2) $\frac{6}{7} : 2 = \frac{6}{7+2} = \frac{6}{14}$

3) Ein Decimalbruch wird dividirt, wie eine ganze Zahl. Der Quotient aber bekömmt wieder eben so viel Decimalstellen, als das Dividendum hat. Geht die Division nicht auf, so entsteht ein gebrochener Bruch.

Z. B. $0{,}00048 : 16 = 0{,}00003$; $0{,}00049 : 16 = 0{,}00003\frac{1}{16}$

Beweis 1. Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ ist ein Quotient, a ist das Dividendum, b der Divisor. (82.) So viel mal aber das Dividendum kleiner wird, so viel mal wird auch der Quotient kleiner (85.).

Also $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b}$ (77.).

Be-

Beweis. 2. So vielmal der Divisor größer wird, so vielmal wird der Quotient kleiner (87.); also ist $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b.c}$

Beweis. 3. Erhellet aus Beweis 1 und §. 117.

§. 127.

Zusatz.

Den Zähler eines Bruches dividiren und den Nenner multipliciren ist gleich viel; so wie es auch umgekehrt gleich gilt, man mag den Zähler multipliciren oder den Nenner dividiren (123.).

§. 128.

Aufgabe

Eine ganze Zahl mit einem Bruche zu dividiren.

Auflösung. 1. Multiplicire die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches und dividire durch den Zähler. Z. B. $9 : \frac{3}{4} = 9 \times 4 : 3 = 12$.

2) Mit einem Decimalbruche wird eine ganze Zahl dividirt, wenn man an sie so viel Nullen anhängt, als der Bruch Decimalstellen hat, und dann alles wie ganze Zahlen behandelt. Z. B. $9 : 0{,}003 = 9000 : 3 = 3000$.

Beweis. 1. $c : \frac{a}{b} = cb : a$ (90. 77.).

Beweis. 2. Erhellet aus Beweis 1 und §. 117.

§. 129.

Aufgabe.

Einen gebrochnen Bruch, dessen Zähler ein Bruch ist, in einem ganzen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Behalte den Zähler des Zählers zum Zähler bey, und nimm das Produkt beider Nenner zum Nenner.

Z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$.

Beweis. Es ist $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c$ (82) $=$ $\frac{a}{bc}$ (126.).

§. 130.

Aufgabe.

Einen Bruch mit einem Bruch zu multipliciren.

Auflösung. 1) Man kann Zähler und Zähler, Nenner und Nenner in einander multipliciren. Die erstere Multiplication giebt den Zähler des gesuchten Produkts und die andre den Nenner desselben.

Es ist $\frac{10}{12} \times \frac{3}{5} = \frac{10 \cdot 3}{12 \cdot 5} = \frac{30}{60}$

2) Auch kann man übers Kreuz dividiren. Der Zähler des Dividendums, durch den Nenner des Divisors dividirt, giebt den Zähler des gesuchten Produkts, und der Nenner des Dividendums, durch den Zähler des Divisors dividirt giebt den Nenner desselben.

Es ist $\frac{10}{12} \times \frac{3}{5} = \frac{10:5}{12:3} = \frac{2}{4}$.

3) Ein=

3) Ginge A) die Division des Zählers nicht auf, so kann man ihn unverändert lassen und dafür im Nenner multipliciren.

Es ist $\frac{10}{12} \times \frac{3}{5} = \frac{10}{12:3 \times 5} = \frac{10}{20}$.

Ginge B) die Division des Nenners nicht auf, so kann man ihn unverändert lassen und dafür im Zähler multipliciren.

Es ist $\frac{10}{12} \times \frac{3}{5} = \frac{10:5 \times 3}{12} = \frac{6}{12}$.

4) Decimalbrüche werden in einander multiplicirt, als wenn sie ganze Zahlen wären. Das Produkt aber bekömmt so viel Decimalstellen, als die Factoren zusammengenommen haben.

Beweis. 1. Es ist $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times c : d$ (82.) $= \frac{ac}{b} : d$ (123.) $= \frac{ac}{bd}$ (126.)

Beweis. 2. $\frac{ac}{bd} = \frac{a:d}{b:c}$ (127.).

Beweis. 3. A) $\frac{a:d}{b:c} = \frac{a}{b:c \times d}$ (127); und B) $\frac{a:d}{b:c} = \frac{a:d \times c}{b}$ (127.).

Beweis. 4. Durch Multiplication der gegebnen Zahlen werden die Zähler multiplicirt (117.) die Nenner aber dadurch, daß man dem Produkte so viel Decimalstellen giebt, als die Factoren zusammengenommen haben (117. 66.). Also wird das verlangte Produkt gefunden. (Bew. 1.).

§. 131.

Zusatz

Brüche geben in veränderter Ordnung einerley Produkt. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, und $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{ca}{db}$; aber $\frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db}$ (80.).

§. 132.

Aufgabe.

Einen Bruch mit einem Bruche zu dividiren.

Auflösung. 1) Man kann den Zähler des Dividendums durch den Zähler des Divisors, und den Nenner des erstern durch den Nenner des andern dividiren.

So ist $\frac{10}{12} : \frac{2}{3} = \frac{10:2}{12:3} = \frac{5}{4}$.

2) Ginge A) die Division des Zählers nicht auf, so läßt man ihn unverändert, und multiplicirt dafür im Nenner.

Es ist $\frac{10}{12} : \frac{2}{3} = \frac{10}{12:3 \times 2} = \frac{10}{8}$.

Wenn B) die Division des Nenners nicht aufginge, so läßt man diesen unverändert und multiplicirt dafür im Zähler.

Es ist $\frac{10}{12} : \frac{2}{3} = \frac{10:2 \times 3}{12} = \frac{15}{12}$

3) Man kann auch übers Kreuz multipliciren. Der Zähler des Dividendums, durch des Divisors Nenner multiplicirt, giebt den Zähler des gesuchten Quotienten; und der Nenner des Dividen-

videndums, durch des Divisors Zähler multiplicirt, giebt den Nenner desselben.

Es ist $\frac{10}{12} : \frac{2}{3} = \frac{10 \times 3}{12 \times 2} = \frac{30}{24}$.

4) Decimalbrüche werden dividirt, wie ganze Zahlen. Der Quotient aber bekömmt so viel Decimalstellen, als das Dividendum mehr hat, wie der Divisor. Hätte dieser mehr Decimalstellen, so hängt man an jenes so viel Nullen an, als man für gut findet. Z. B. 0,024 : 0,08 = 0,3; und 0,24 : 0,00008 = 0,24000 : 0,00008 = 3000.

Beweis. 1. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b:d} : c$ (90. 77.) $= \frac{a:c}{b:d}$ (126.).

Beweis. 2. A) $\frac{a:c}{b:d} = \frac{a}{b:d \times c}$ (127.).

B) $\frac{a:c}{b:d} = \frac{a:c \times d}{b}$ (127.).

Beweis. 3. $\frac{a:c}{b:d} = \frac{a \times d}{b \times c}$ (127.).

Beweis. 4. Wenn man die Decimalbrüche als ganze Zahlen betrachtet, und so dividirt, so werden die Zähler dividirt (117.), die Nenner aber dadurch, daß man die Anzahl der Decimalstellen des Dividendums um so viele vermindert als der Divisor hat und den Quotienten nur so viele giebt, als das Dividendum mehr hat wie der Divisor (117. 78.). — Daß man aber an

einen Decimalbruch so viele Nullen anhängen kann, als man will, ist aus §. 118. bekannt.

§. 133.

Aufgabe.

Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung. Man giebt dem Zähler des Bruches ein Komma, und hängt so viele Nullen an, als man will; so hat man einen Decimalbruch. Diesen dividirt man durch den Nenner des gegebnen Bruches, so hat man den verlangten Decimalbruch.

Bew. Es ist $\frac{3}{4} = 3:4$ (82.) $= 3{,}00\ldots:4$ (119.); und so in jedem andern Falle.

§. 134.

Zusatz

Man kann jede ganze Zahl in einen Decimalbruch verwandeln, wenn man ihn ein Komma beyfügt und dann so viele Nullen anhängt, als man gut findet. Dies kann geschehen, wenn man eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren und den Quotienten in Decimaltheilen angeben soll; aber auch, wenn bey einer Division ein Rest bleibt, so kann man diesen Rest in einen Decimalbruch verwandeln, und das was am Quotienten noch fehlt in Decimaltheilen finden; wenigstens jedesmal so genau als man will. Z. B.

4)

```
4) 9   | 2,25
   8   |
  ----
   1,00
4) 8:
  ----
   20
4) 20
  ----
   0
```

```
3) 7   | 2,3333...
   6   |
  -------
   1,0000
3) 9:
   ----
   10:
3) 9:
   ----
   10
3)  9:
   ----
   10
3)  9
   ----
    1
```

§. 135.

Anmerkung.

Die Veränderungen, welche man mit einer Zahl, im Absicht auf die Größe vornehmen kann, sind Vermehrung und Verminderung. Wenn aber eine Zahl vermehrt oder vermindert wird, so muß sie entweder um so viel, oder so vielmal, als eine andre anzeigt, vermehrt oder vermindert werden. Daraus entstehen die vier bisher betrachteten Rechnungsarten, außer denen es weiter keine giebt: Addition, Subtraction, Multiplication und Division. Eine besondere Anwendung davon ist nächstfolgende.

§. 136.

Erklärung.

Wenn eine Zahl, gewisse mal genommen, in sich selbst multiplicirt wird, so heißt das herauskommende Produkt eine **Potenz** (Dignität)

 von

von dieser Zahl, und diese Zahl selbst heißt die Wurzel. Die Potenz einer Zahl heißt die zweyte, dritte, vierte 2c., je nachdem die Zahl, zweymal, dreymal, viermal 2c. genommen in sich selbst multiplicirt ist. Eben so heißt die Wurzel aus einer Zahl die zweyte, dritte, vierte 2c. je nachdem sie zweymal, dreymal, viermal 2c. genommen, in sich selbst multiplicirt, jene Zahl hervorbringt. Die zweyte Potenz heißt auch die Quadratzahl, und die dritte auch die Kubikzahl, so wie die zweyte Wurzel auch die Quadratwurzel und die dritte die Kubikwurzel genannt wird. Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet die Wurzel aus der Zahl, vor welcher es stehet; $\sqrt[2]{}$ die Quadratwurzel, $\sqrt[3]{}$ die Kubikwurzel, $\sqrt[4]{}$ die vierte Wurzel u. s. f. Wird gedachtes Zeichen schlechthin gebraucht, so ist allemal die Quadratwurzel zu verstehen. Ferner bedeutet a^2 die zweyte Potenz von der Zahl a, a^3 die dritte, und a^n überhaupt diejenige Potenz, welche die Zahl n anzeigt. Eine Zahl, wie n, die also anzeigt, wie viel mal eine andere in sich selbst multiplicirt sey, heißt ein Exponent.

§. 137.

Zusatz 1.

Jede Potenz von einer vorgelegten Zahl kann durch Multiplication gefunden werden. Es ist $5^2 = 5 \times 5 = 25$, und $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 122$. — Gleiche Zahlen haben ein gleiches Quadrat, einen gleichen Kubus u. s. f. (64).

Also

Also auch umgekehrt; gleiche Zahlen haben gleiche Quadratwurzeln; Kubikwurzeln u. s. f.

§. 138.

Zusatz 2.

Man kann sich jede Wurzel als aus zwey Theilen bestehend vorstellen, den ersten a, den andern b, die ganze Wurzel also a + b nennen. Alsdann ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

§. 139.

Lehrsatz.

Wenn man eine Potenz einer Zahl mit einer andern Potenz der nähmlichen Zahl multiplicirt, so ist das Product eine neue Potenz dieser Zahl, deren Exponennt die Summe von den Exponenten der beiden vorigen Potenzen ist: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Beweis. $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5 = a^{2+3}$. Eben so in jedem andern Falle; also überhaupt: $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

§. 140.

Zusatz.

Also auch umgekehrt, $a^{m+n} : a^m = a^{m+n-m} = a^n$; oder $b^x : b^y = b^{x-y}$.

§. 141.

Lehrsatz.

Eine Potenz wird von neuem auf eine Potenz erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem Exponenten dieser neuen Potenz multiplicirt. $(a^m)^n = a^{mn}$

Beweis. $(a^3)^2 = a^3 \times a^2$ (137.). $= a^6$ (139) $= a^{3.2}$. Eben so in allen andern Fällen, also überhaupt: $(a^m)^n = a^{mn}$.

§. 142.

Zusatz.

Also auch $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$. Oder $\sqrt[y]{b^x} = b^{\frac{x}{y}}$.

§. 143.

Lehrsatz.

Eine Quadratzahl hat höchstens doppelt so viel Ziffern als die Wurzel, aber auch wenigstens doppelt so viel weniger eine.

Beweis. Es sey die Wurzel a, so ist das Quadrat davon $a^2 = a \times a$. Dieses Produkt hat höchstens so viele Ziffern als die beiden Faktoren a und a zusammengenommen haben (70), aber auch wenigstens so viel, weniger eine (70).

§. 144.

Zusatz.

Man theile eine vorgelegte Zahl von der Rechten gegen die Linke in zweyziffrige Klassen, wenn auch für die letzte Klasse nur eine Ziffer übrig bleibt. So viele Klassen alsdann entstehen, soviele Ziffern hat die Quadratwurzel aus der vorgelegten Zahl.

§. 145.

Lehrsatz.

Das Product aus der Summe und Differenz zweyer Zahlen ist der Differenz der Quadrate von die-

diesen beiden Zahlen gleich. $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$.

Beweis. Es sey $a - b = x$; so ist $a = x + b$. Folglich $(a+b).a = (a+b).x + (a+b)b$ (65.), folglich $(a+b)a - (a+b)b = (a+b)x$, (50.) welches also das erwähnte Product ist. Aber $(a+b)a - (a+b)b = a^2 - b^2$.

§. 146.

Aufgabe.

Aus einer gegebnen Zahl die Quadratwurzel zu finden.

1) Wenn die gegebne Zahl höchstens aus zwey Ziffern, die Wurzel also nur aus einer Ziffer besteht; so kann diese Wurzel vermittelst des Einmaleins gefunden werden. — Ließe sich keine ganze Zahl angeben, die genau die Wurzel aus der vorgelegten Zahl wäre, so nimmt man fürs erste diejenige Zahl, welche dieser Wurzel am nächsten kömmt, und notirt den Rest, den ihr Quadrat von der vorgelegten Zahl übrig läßt. Z.B.

49	7	53	7
49		49	
0		4	

2) Wenn die vorgelegte Zahl zwey Klassen, die Wurzel also zwey Ziffern hat; so theilt man die Wurzel in zwey Theile, a und b, und zwar so, daß man unter a die erste und unter b die

zwey-

zweyte Ziffer derselben verstehet. Hiernächst aa) betrachtet man die höchste Klasse, als wenn sie allein da wäre, und zieht daraus, wie bey Nr. 1, die Wurzel; so bekömmt man a. Alsdann wird a^2 genau gemacht, unter die höchste Klasse untergesetzt, davon abgezogen und der Rest darunter geschrieben. bb) Zu diesem Reste setzet man die erste Ziffer der zweyten Klasse herunter; so ist in dieser Zahl 2ab enthalten. Man dividirt mit 2a herein, so kömmt b heraus. Alsdann wird 2ab genau gemacht, unter die erwähnte Zahl untergesetzt, davon abgezogen und der Rest darunter geschrieben. cc) Zu diesem Reste setzet man die letzte Ziffer herunter, so ist in dieser Zahl b^2 enthalten. Man setzet also b^2 darunter und zieht es ab. Bleibt kein Rest, so ist die gefundene Wurzel vollständig. Sonst wird der Rest fürs erste notirt.

				$a+b$
	68	89	8	3
$a^2 =$	64			
$2a = 16)$	4	8		
$2ab =$	4	8		
		09		
$b^2 =$		9		
		0		

3) Wenn die vorgelegte Zahl drey Klassen; die Wurzel also drey Ziffern hat, so betrachtet man aa) die beiden höchsten Klassen, als wenn

sie

sie allein da wären, und sucht daraus die Wurzel nach Nr. 2; so bekömmt man die beiden ersten Ziffern der gesuchten Wurzel. Alsdann betrachtet man bb) diese beiden Ziffern als a und die noch fehlende als b; und eben so die beiden höchsten Klassen der gegebnen Zahl nunmehr als Eine, und die noch übrige als die andere. Zu dem Reste, der von der nunmehrigen ersten Klasse geblieben ist, setzt man die erste Ziffer der letzten Klasse herunter, so ist in dieser Zahl wieder 2ab enthalten, und man verfährt völlig, wie bey Nr. 2. Z. B.

```
               45|42|76 | 674
      a² =     36
  2a = 21 )    94
     2ab =     84
              102
      b² =     49
 2a = 134)    537
     2ab =    536
                1 6
      b² =      1 6
                  0
```

4) So wie aus den zwey ersten Ziffern einer Wurzel die dritte gefunden wird, eben so wird aus den drey ersten wieder die vierte, aus den vier ersten die fünfte u. s. f. gefunden.

Beweis 1. Erhellet aus §. 136. 67.

Be-

Beweis 2. aa) Wenn die Wurzel auf die vorgeschriebene Art eingetheilt wird; so bestehet a^2 aus hunderten, ist also lediglich in der höchsten Klasse der gegebnen Zahl enthalten. Folglich wird a auf die vorgeschriebne Art gefunden. bb) Das Product 2ab ist ein Inbegriff von Zehnern, folglich enthalten in der ersten Ziffer der zweyten Klasse und dem vom vorigen gebliebenen Reste. Wenn man aber in diese Zahl mit 2a hereindividirt, so muß b herauskommen (77.). cc) b^2 muß in dem, was von der vorgelegten Zahl nun noch übrig ist, enthalten seyn.

Beweis 3. 4. Erhellet auf ähnliche Art.

§. 147.

Lehrsatz.

Wenn bey der Ausziehung einer Quadratwurzel ein Rest bleibt, so kann derselbe so groß seyn als das Duplum der gefundenen Wurzel; wenn er aber so groß ist, als das Duplum der Wurzel plus Eins; so kann man die Wurzel um Eins vermehren.

Beweis. Es ist

Das Quadrat von $a = a^2$

Das Quadrat von $a + 1 = a^2 + 2a + 1$.

§. 148.

Lehrsatz.

Die Wurzel aus einem Bruche wird gefunden, wenn man die Wurzel aus Zähler und Nenner nimmt.

Be-

Beweis. Die Quadratzahl von einem Bruche $\frac{a}{b}$, ist $= \frac{a^2}{b^2}$ (136.). Also auch umgekehrt

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

§. 149.

Zusatz 1.

Aus einem gegebnen Decimalbruche wird die Quadratwurzel gefunden, wenn man aus denselben die Quadratwurzel eben so auszieht, als wenn er eine ganze Zahl wäre, der gefundenen Wurzel aber nur halb so viele Decimalstellen giebt, als der gegebene Bruch hat. Denn alsdann wird die Wurzel aus Zähler und Nenner gezogen (117). Wäre die Anzahl der Decimalstellen des gegebnen Bruches ungerade, so könnte man sie durch eine angehängte Null gerade machen (118.). Z. B. $\sqrt{7,34} = 2,8$.

	7, 84	2, 8
$a^2 =$	4	
$2a =$	4) 3 8	
$2ab =$	3 2	
	64	
$b^2 =$	64	
	0	

§. 150.

§. 150.

Zusatz 2.

Wenn sich die Wurzel einer vorgeschriebenen Zahl nicht in ganzen Zahlen angeben läßt, so kann man gedachte Zahl in einen Decimalbruch verwandeln (134) und so ihre Wurzel in Decimaltheilen finden, wenigstens allemal so genau, als verlangt werden mag. So findet man $\sqrt{3} =$ 1,73205... wenn man 3 in den Decimalbruch 3,0000000000 verwandelt.

Auch braucht man die angehängten Nullen nicht sogleich an die gegebene Zahl selbst anzuhängen, sondern man kann sie auch, wenn bey der Ausziehung einer Wurzel ein Rest bleibt, diesem Reste beyfügen, oder sie jedesmal erst da hinzusetzen, wo man sie bey der Rechnung braucht, wenn man alsdann nur bemerkt, wie viele Nullen man angehängt hat, um die Anzahl der Decimalstellen in der Wurzel richtig bestimmen zu können.

§. 151.

Lehrsatz.

Eine Kubikzahl hat höchstens dreymal so viel Ziffern als ihre Wurzel; aber auch wenigstens dreymal so viel, weniger zwey.

Beweis. Wenn die Wurzel a ist, so ist so ist die Kubikzahl $a^3 = aaa$. Dieses Produkt hat höchstens so viel Ziffern als die drey Factoren a, a und a zusammengenommen (64), das ist, die Kubikzahl hat höchstens dreymal so viel Ziffern

als

als die Wurzel. Gedachtes Produkt hat aber auch wenigstens so viel Ziffern als seine Factoren zusammen, weniger zwey (71.); oder, die Kubikzahl hat dreymal so viel Ziffern als die Wurzel weniger zwey.

§. 152.
Zusatz.

Wenn man eine Kubikzahl von der Rechten gegen die Linke in dreyziffrige Klassen theilt, so hat die Wurzel eben so viele Ziffern, als Klassen vorhanden sind; wenn auch in der letzten Klasse nur eine oder zwey Ziffern zu stehen kämen.

§. 153.
Aufgabe.

Aus einer gegebnen Zahl die Kubikwurzel zu finden.

Auflösung. 1) Wenn die gegebne Zahl höchstens drey Ziffern hat, so hat die Wurzel daraus nur eine, und man kann diese Wurzel vermittelst des Einmaleins finden. Denn desto schneller zu rechnen, merke man sich ein für allemal die ersten neun Kubikzahlen

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

Wenn sich die gesuchte Kubikwurzel nicht in ganzen Zahlen angeben läßt, so nimmt man fürs erste nur diejenige Zahl als Wurzel an, die der wahren am nächsten kömmt, und bemerkt nur den Rest, den ihr Kubus von der gegebnen Zahl übrig läßt, Z. B.

343	7	348	7
343		343	
0		5	

2. Wenn die gegebne Zahl zwey Klassen, die Wurzel also zwey Ziffern hat; so theile die letztere ein, wie §. 146. Nr. 2. Dadurch ist wieder bestimmt, wo jeder Theil des Kubus (138.) zu finden ist: aa) Betrachte zuerst die höchste Klasse, als wenn sie allein da wäre, und nimm daraus die Kubikwurzel, wie bey Nr. 1.; so ist diese die erste Ziffer, a. der gesuchten Wurzel. Mache alsdann a^3 genau, setze es unter die höchste Klasse unter, ziehe es davon ab und schreibe den Rest darunter. bb) Zu diesem Reste setze die erste Ziffer der zweiten Klasse herab. In dieser, daraus entstehenden, Zahl ist $3a^2b$ enthalten. Dividire mit $3a^2$, so kömmt b, die zweyte Ziffer der gesuchten Wurzel, heraus. Mache alsdann $3a^2b$ genau, setze es unter die gedachte Zahl unter, ziehe es ab und schreibe den Rest darunter. cc) Zu diesem Reste setze die zweyte Ziffer der zweyten Klasse herab, so ist in dieser Zahl $3ab^2$ enthalten. Mache $3ab^2$ ziehe es von derselben ab, und schreibe den Rest darunter. dd) Zu diesem Reste endlich setze die letzte Ziffer herab, so ist in dieser Zahl b^3 enthalten. Mache b^3 und ziehe es von derselben ab. Bleibt nun hier kein Rest, so ist die gefundene Zahl genau die Kubikwurzel aus der vorgelegten. Bleibt aber ein Rest, so fehlen noch

eini=

einige Theile an der Wurzel. Gedachter Rest wird fürs erste nur angemerkt. Z. B.

$$
\begin{array}{rrl}
 & 103|823 & = 47 \quad (a+b) \\
a^3 = & 64 & \\
\hline
3a^2 = 48) & 398 & \\
3a^2b = & 336 & \\
\hline
 & 622 & \\
3ab^2 = & 588 & \\
\hline
 & 343 & \\
b^3 = & 343 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

3) Wenn die gegebene Zahl drey oder noch mehr Klassen hat, so gelten eben die Regeln, die §. 146. Nr. 3. und 4. gegeben sind.

Beweis 1. Erhellet aus §. 136. und §. 67.

Beweis 2. aa) Wenn die Wurzel, nach der Vorschrift so eingetheilt ist, daß man unter a ihre erste Ziffer versteht, so enthält a^3 lauter Tausendter, kann also blos in der höchsten Klasse der gegebnen Zahl enthalten seyn. Folglich wird a nach der gegebnen Vorschrift gefunden. bb) a^2 besteht aus Hundertern, also $3a^2b$ ist ein Inbegriff von Hundertern, folglich nur enthalten in der ersten Ziffer der zweyten Klasse und dem vom Vorigen etwa gebliebenen Reste. Wenn man sonach in diese Zahl mit $3a^2$ herein dividirt, so muß b herauskommen (77.). cc) Das Product

$3ab^2$ ist ein Inbegriff von Zehnern, weil a Zehner bedeutet, folglich enthalten in der zweyten Ziffer der zweyten Klasse, und dem Reste, der vom Vorigen etwa geblieben ist. dd) Endlich muß b^3 in dem enthalten seyn, was von der gegebnen Zahl nun noch übrig ist.

§. 154.

Lehrsatz.

Wenn bey der Ausziehung einer Kubikwurzel ein Rest bleibt, so kann derselbe so groß seyn, als das Triplum der bis dahin gefundene Wurzel nebst dem Triplum ihrer Quadratzahl. So bald er aber nur noch um eins größer ist, so kann man die Wurzel um eins größer nehmen.

Beweis. Wenn man zur Wurzel eins hinzusetzt, so kömmt zum Kubus das Triplum der vorigen Wurzel und das Triplum ihrer Quadratzahl und eins hinzu. Es ist

der Kubus von $a = a^3$

der Kubus von $a + 1 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

§. 155.

Lehrsatz.

Die Kubikwurzel aus einem Bruche wir gefunden, wenn man aus dem Zähler und aus dem Nenner die Kubikwurzel zieht.

Beweis. Der Kubus von einem Bruche, $\frac{a}{b}$, ist $= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ (136) $= \frac{a^3}{b^3}$; folglich

lich auch umgekehrt $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}}$; oder $\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m}}$$

§. 156.

Zusatz. I.

Aus einem gegebenen Decimalbruche zieht man die Kubikwurzel eben so, als wenn er eine ganze Zahl wäre. Nur muß man der gefundenen Wurzel dreymal so wenig Decimalstellen geben, als der gegebene Bruch hat. Denn alsdann wird die Kubikwurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner gezogen (117). Ließe sich die Anzahl der Decimalstellen des gegebenen Bruches durch 3 nicht theilen, so kann man so viel Nullen anhängen, daß dies angeht (118.).

$$
\begin{array}{rrl}
 & 32,|768| & = 3,2 \\
a^3 = & 27 & \\
3a^2 = 27) & 57 & \\
3a^2b = & 54 & \\
 & 36 & \\
3ab^2 = & 36 & \\
 & 08 & \\
b^3 = & 8 & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

§. 157.

Zusatz 2.

Wenn sich die Kubikwurzel einer vorgelegten Zahl nicht in ganzen Zahlen angeben läßt, so kann man gedachte Zahl in einen Decimalbruch verwandeln (134) und so ihre Wurzel in Decimaltheilen finden, wenigstens allemal so genau als man will.

Auch braucht man; wie § 150, die an die gegebne Zahl anzuhängenden Nullen, erst zu dem bleibenden Reste, oder auch jedesmal erst da hinzuzusetzen, wo man sie bey der Rechnung gebraucht.

IV.

Von dem Verhältnissen.

§. 158.

Erklärung.

Ein Verhältniß einer Größe zu einer andern (§. 29), welches darin besteht, daß sie mehr oder eben so viel oder weniger Einheiten enthält, als diese andere, ist ein arithmetisches. Ein Verhältniß einer Größe zu einer andern aber, welches darin besteht, daß sie diese andere gewisse mal in sich enthält, ist ein geometrisches; dergleichen immer gemeint wird, wenn von einem Verhältnisse schlechthin die Rede ist. Man betrachtet 12 in einem arithmetischen Verhältnisse wenn man sagt: 12 ist um 8 mehr als 4; in einem geometrischen aber, wenn man sagt: 12 ist dreymal so viel als 4, oder: 12 ist $\frac{1}{2}$ mal so viel als 24. Die Größe, die man im Verhältnisse

zu einer andern betrachtet, und diese andere, heißen Glieder des Verhältnisses, die erstere das Vorderglied, und die andere das Hinterglied.

§. 159.

Zusatz 1.

Wie groß ein arithmetisches Verhältniß sey, wird erkannt, wenn man vom Vordergliede das Hinterglied abzieht; daher auch ein arithmetisches Verhältniß wie eine Subtraktion (12 — 4) geschrieben wird. Die Differenz der Glieder heißt dann auch der Name des arithmetischen Verhältnisses; der positiv und negativ seyn kann, je nachdem das Vorderglied größer oder kleiner ist als das Hinterglied.

§. 160.

Zusatz 2.

Wie groß ein geometrisches Verhältniß sey, wird erkannt, wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied dividirt, weswegen man das geometrische Verhältniß auch wie eine Division (12 : 4) schreibt. Die Zahl, welche angiebt, wie vielmal das Hinterglied im Vordergliede enthalten sey, heißt der Name des geometrischen Verhältnisses (auch der Exponent desselben.) Dieser Name ist ein ächter Bruch, wenn das Vorderglied kleiner ist, als das Hinterglied. Sonst ist er eine ganze Zahl oder ein unächter Bruch.

§. 161.

Zusatz 3.

Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie einerley Namen haben; sonst sind sie ungleich.

Auch sind Verhältnisse gleich groß, die Einem dritten gleich sind (§. 20)

§. 162.

Erklärung.

Die Gleichheit zweyer Verhältnisse heißt eine Proportion; eine arithmetische, wenn die gleichen Verhältnisse arithmetisch sind, und, wenn diese gemoetrisch sind, eine geometrische. Unter einer Proportion schlechthin ist eine geometrische zu verstehen. Das erste und letzte Glied heißen die äußern, das zweyte und dritte die mittlern Glieder der Proportion. Wenn die mittlern Glieder einander gleich sind, so ist die Proportion eine stätige, widrigenfalls eine diskrete. Die Proportion $8 : 4 = 4 : 2$ ist stätig. Diese aber $8 : 4 = 6 : 3$ ist diskret. Die stätige wird abgekürzt so geschrieben $(8 : 4 : 2)$ und eine arithmetische so: $(8 — 6 — 4)$.

§. 163.

Zusatz 1.

Ein allgemeiner Ausdruck für die arithmetische Proportion ist $(a + d) — a = (b + d) — b$. In beyden Verhältnissen ist d der Name. Eine Formel für die geometrische Proportion ist $ma : a = mb : b$, wo der Name beyder Verhältnisse m ist.

§. 164.

Zusatz 2.

Ein Produkt zweyer Zahlen a und b ist die vierte Proportionalzahl zu 1, dem Multiplicator

a,

a, und dem Multiplicandum b. Denn 1: a=b: ab: (62.). Wenn man c durch d dividirt, so ist der Quotient, $\frac{c}{d}$, die vierte Proportionale zu dem Divisor d, zu 1, und dem Dividendum c. Denn d: 1=c: $\frac{c}{d}$ (74.).

§. 165.

Erklärung.

Eine Progression (Reihe schlechthin) ist eine Reihe von mehr als drey Größen, die alle in stätiger Proportion auf einander folgen. Je nachdem nun dieselben in stätiger geometrischer oder arithmetischer Proportion sind, ist auch die Progression eine geometrische oder arithmetrische Progression. Wenn die Progression von größern Gliedern zu kleinern fortgeht, so heißt sie eine fallende, im entgegengesetzten Falle eine steigende. Die Zahl, die bey einem Gliede angiebt, das wie vielste Glied in der Reihe es sey, heißt der Zeiger desselben.

§. 166.

Zusatz 1.

Eine arithmetische Progression kann vorgestellt werden durch den Ausdruck: a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d..... und eine geometrische durch die Formel: a, ma, m^2a, m^3a, m^4a... Wenn die arithmetische Reihe steigt, so ist der Name, d, positiv, wenn sie fällt, negativ. Wenn die geometrische Reihe fällt, so ist ihr Name, m, ein

ein ächter Bruch, wenn sie steigt, ein unächter, oder eine ganze Zahl.

§. 167.

Zusatz 2.

Wenn man alle Glieder einer arithmetischen Reihe, die mit 1 anfängt, zusammen addirt, so heißt die Summe, eine vieleckige Zahl (figurirte, Polygonal-Zahl); und insbesondre eine dreyeckige, wenn der Name der Reihe = 1 ist, eine viereckige, wenn der Name = 2 ist u. s. f.; so daß sie immer zwey Ecken mehr hat, als der Name der Reihe anzeigt. So ist z. B. $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, also 10 eine dreyeckige Zahl. Ferner ist $1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$, also 35 eine fünfeckige Zahl.

§. 168.

Lehrsatz.

1) Zwey Größen bleiben in einerley arithmetischem Verhältnisse, wenn man gleich viel zu ihnen hinzuaddirt, oder gleich viel von ihnen subtrahirt; und sie bleiben 2) in einerley geometrischen Verhältnisse, wenn man sie mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt.

Beweis. 1. Wenn sich a von b um x unterscheidet, so unterscheidet sich $a + d$ von $b + d$ auch um x, und $a - d$ von $b - d$ ebenfalls. Also $a - b = (a + d) - (b + d) = (a - d) - (b - d)$ (161.).

 Be-

Beweis. 2) Wenn a durch b dividirt x giebt, so giebt m a : m b ebenfalls x und $\frac{a}{m}$: $\frac{b}{m}$ auch (§. 90.), folglich a : b = m a : m b = $\frac{a}{m}$: $\frac{b}{m}$. (161.).

§. 169.

Lehrsatz.

Sowol 1) in der arithmetischen, als auch 2) in der geometrischen Proportion kann man die mittlern Glieder verwechseln, wenn alle Glieder Größen von einerley Art sind.

Beweis. 1. Wenn in einer arithmetischen Proportion, $(a+d) - a = (b+d) - b$, die mittlern Glieder: verwechselt werden, so bekömmt man: $(a+d) - (b+d) = a - b$, welches eine richtige Proportion ist (163.).

Bew. 2) Verwechselt man in einer geometrischen Proportion, m a : a = m b : b, die mittlern Glieder, so bekömmt man die ebenfalls richtige Proportion m a : m b = a : b (168.).

§. 170.

Lehrsatz.

1) In einer arithmetischen und 2) in einer geometrischen Proportion kann man die Verhältnisse umkehren.

Beweis. 1. Wenn man in einer arithmetischen Proportion, $(a+d) - a = (b+d) - b$, die Verhältnisse umkehrt, also setzet: $a - (a+d) = b - (b+d)$; so wird $(-d)$ der Name

me beider Verhältnisse (§. 57.); beide Verhältnisse bleiben also gleich (161.).

Beweis. 2. Aus einer geometrischen Proportion, ma : a = mb : b wird, durch die Umkehruug, a : ma = b : mb. Alsdann ist $\frac{1}{m}$ der Name beyder Verhältnisse: beyde sind also gleich (161.).

§. 171.

Lehrsatz.

1) In der arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern, und 2) in der geometrischen das Produkt der äußern dem Produkte der mittlern Glieder, gleich.

Beweis. 1. In einer arithmetischen Proportion, $(a+d) - a = (b+d) - b$, ist die Summe des ersten und vierten Gliedes = $a+d+b$, und die Summe des zweyten und dritten = $a+b+d$. Beyde Summen sind gleich (§. 42.).

Beweis. 2. In einer geometrischen Proportion, ma : a = mb : b ist das Produkt aus den äußern Glieder mab und das Produkt aus den innern = amb. Beide Produkte sind gleich (§. 80.).

§. 172.

Zusatz.

In einer stätigen arithmetischen Proportion, a — b — c, ist das Duplum des mittelsten Gliedes der Summe der äußern gleich. Denn a —

b — c

b — c ist so viel, als $a - b = b - c$ (162.). In einer stätigen geometrischen Proportion, $a : b : c$ ist das Quadrat des mittelsten Gliedes dem Produkte aus den äußern gleich. Denn $a : b : c$ ist so viel, als $a : b = b : c$ (162.).

§. 173.

Aufgabe.

Zu drey gegebnen Gliedern 1) die vierte arithmetische und 2) die vierte geometrische Proportionale, zu finden.

Auflösung. 1. Wenn man von der Summe des zweyten und dritten Gliedes das erste Glied abzieht, so hat man das Gesuchte.

Auflösung. 2. Das Produkt aus dem zweyten und dritten Gliede dividire mit dem ersten, so kömmt das Gesuchte heraus.

Beweis. 1. Wenn a, b, c die drey gegebnen Glieder sind, und x das gesuchte vierte ist, so ist $a + x = b + c$ (171.), folglich $x = b + c - a$ (50.).

Beweis. 2. Es seyen a, b, c das erste, zweyte, dritte und x das gesuchte vierte Glied, so ist $ax = bc$ (177.) folglich $x = \frac{bc}{a}$ (79.).

§. 174.

Zusatz.

Zu zwey gegebnen Gliedern findet man die dritte stätige Proportionale 1) die arithmetische, wenn man von dem Duplum des zweyten Glie-

des das erste abzieht (172.) und 2) die geometrische, wenn man das Quadrat des zweyten Gliedes mit dem ersten dividirt (172.).

§. 175.

Aufgabe.

Zu gegebnen äußern Glieder die mittlere stätige Proportionale zu finden, und zwar 1) die arithmetische und 2) die geometrische.

Auflösung. 1. Nimm die Summe der gegebnen äussern Glieder halb.

Auflösung. 2. Nimm aus dem Produkte der gegebnen äussern Glieder die Quadratwurzel.

Beweis. 1. Wenn a und c die gegebnen äussern Glieder sind, und x ist das gesuchte mittlere; so ist $2x = a + c$ (172) also $x = \frac{a+c}{2}$ (79.).

Beweis 2. Es seyen a und c die gegebenen äussern Glieder und x das gesuchte mittlere, so ist $x^2 = ac$; (172.) folglich $x = \sqrt{ac}$ (137.).

§. 176.

Lehrsatz.

Wenn die Summe zweyer Größen der Summe zweyer andern gleich ist; so erhält man allemal eine arithmetische Proportion, wenn man die beyden Theile der einen Summe zu mittlern und die beyden Theile der andern zu äussern Gliedern macht.

Be-

Beweis. Es sey $a + d = b + c$; so ist $a = b + c - d$ (50.) folglich $a - b = c - d$ (50. Vergl. 161.).

§. 177.

Lehrsatz.

Wenn das Produkt zweyer Größen dem Produkte zweyer andern gleich ist, so hat man allemal eine geometrische Proportion, wenn man das eine Paar dieser Größen zu mittlern und das andere Paar zu äussern Gliedern macht.

Beweis. Man setze $ad = bc$; so ist $a = \frac{bc}{d}$ (70.), folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (79. 126.), folglich $a : b = c : d$.

§. 178.

Zusatz.

Zwey gleiche Brüche $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geben auf doppelte Art allemal eine geometrische Proportion: 1) sind Zähler und Nenner in beiden Brüchen in einerley Verhältnisse, $a : b = c : d$; 2) verhalten sich auch die Zähler gegeneinander wie die Nenner, $a : c = b : d$ (169.).

§. 179.

Aufgabe.

Jedes Glied einer arithmetischen Reihe zu finden wenn entweder 1) das erste Glied und der

Name,

Name, oder 2) das letzte Glied und der Name gegeben sind.

Auflösung 1. Zu dem ersten Gliede addire den Namen, einmal weniger genommen als der Zeiger des gesuchten Gliedes angiebt, hinzu.

Auflösung 2. Von dem letzten Gliede subtrahire den Namen, einmal weniger genommen, als der Zeiger des gesuchten Gliedes angiebt, wenn man hier unter dem Zeiger desselben die Zahl versteht, die angiebt, das wievieltste Glied es, vom Ende rückwärts gezählt, sey.

Beweis 1. Man nehme eine arithmetische Reihe und setze über jedes Glied seinen Zeiger (166.):

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d. \end{matrix}$$

Nimmt man nun irgend ein Glied, etwa das dritte, so enthält es, ausser dem ersten Gliede a, den Namen d, zweymal, also einmal weniger als der Zeiger angiebt. Da nun bey jedem folgenden Gliede der Name einmal hinzu kömmt, so enthält jedes das erste Glied in sich, und den Namen, einmal weniger, als der Zeiger angiebt. Also das n^{te} Glied ist $= a+(n-1)d$.

Beweis 2. Wenn man in der Reihe von dem letzten Gliede anfängt und rückwärts gehet, so wird aus dem letzten Gliede das 2te, wenn man den Namen einmal abzieht, das 3te, wenn man den Namen zweymal abzieht; und, weil nun

nun jedes folgende Glied den Namen einmal weniger enthält, so bekömmt man jedes Glied, wenn man vom letzten den Namen, einmal weniger genommen als der rückwärts zählende Zeiger des gesuchten angiebt, subtrahirt. Also ist das m^{te} Glied vom Ende $= a + (n - 1) d - (m - 1) d$; wenn die Reihe n Glieder hat, und also (Nr. 1.) $a + (n - 1) d$ das letzte Glied ist.

Man nehme z. B. die arithmetische Reihe, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, deren Name = 2 ist. Wenn man nun zum ersten Gliede 3, den Namen, 2, siebenmal hinzusetzt, so bekömmt man das 8te Glied, 17. Wenn man dagegen vom letzten Gliede, 19, den Namen, 2, fünfmal abzieht; so bekömmt man das 6te Glied vom Ende, 9.

§. 180.

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Reihe ist die Summe jeder zwey Glieder, wovon das eine eben so weit vom Ende, als das andre vom Anfange entfernt ist, der Summe des ersten und letzten gleich.

Beweis. Man setzt eine Reihe mit n Gliedern, das erste Glied sey a und der Name d; so ist das letzte Glied $= a + (n - 1) d$; also die Summe des ersten und letzten $= 2 a + (n - 1) d$. Nun nehme man das m^{te} Glied vom Anfange, so ist dasselbe $= a + (m - 1) d$ (179. S. 1.), und das m^{te} Glied vom Ende, so ist dieses $= a + (n - 1) d - (m - 1) d$ (179. S. 2).

S. 2.); also die Summe beyder Glieder $= a + (m - 1)d + a + (n - 1)d - (m - 1)d. = 2a + (n - 1)d$; also der Summe des ersten und letzten gleich.

§. 181.

Aufgabe.

Jedes Glied einer geometrischen Reihe zu finden, wenn entweder 1) das erste Glied und der Name, oder 2) das letzte Glied und der Name, gegeben sind.

Auflösung 1. Multiplicire das erste Glied mit dem Namen auf derjenigen Potenz, deren Exponent um Eins geringer ist, als der Zeiger des gesuchten Gliedes angiebt.

Auflösung 2. Dividire das letzte Glied mit dem Namen auf derjenigen Potenz, deren Exponent um Eins geringer ist, als der rückwärts zählende Zeiger des gesuchten Gliedes angiebt.

Beweis 1. Man nehme eine geometrische Reihe und setze über jedes Glied seinen Zeiger (166.):

1	2	3	4	5	6
a,	$a.m$,	$a.m^2$,	$a.m^3$,	$a.m^4$,	$a.m^5$,

Nimmt man nun irgend ein Glied, etwa das dritte, so ist dieses ein Produkt aus dem ersten, a, und dem Namen, m, auf der zweyten Potenz, also auf einer Potenz, deren Exponent um Eins geringer ist als der Zeiger. Dies bleibt auch bey

jedem folgenden Gliede eben so. Denn bey jedem folgenden wird der gedachte Exponent um Eins größer und der Zeiger auch. Also das n^{te} Glied ist $= a.m^{(n-1)}$

Beweis 2. Wenn man vom letzten Gliede anfängt und rückwärts geht, so wird der Exponent der Potenz des Namen, in dem zweiten Gliede um Eins geringer, in dem dritten um 2, in dem vierten um drey; also immer um so viel als der rückwärts zählende Zeiger angiebt, weniger Eins. Wenn also die Reihe n Glieder hat, und also (Nr. 1.) das letzte Gliede $=$ $a.m^{(n-1)}$ ist, so ist das p^{te} Glied vom Ende $= a.m^{(n-1)-(p-1)}$; welches denn auch $=$ $a.m^{(n-1)} : m^{(p-1)}$ ist (140.).

In der geometrischen Reihe: 3, 6, 12, 24, 48, 96 ist der Name = 2. Wenn ich nun das erste Glied, 3, mit 2^4 (= 16.) multiplicire, so bekomme ich das 5te Glied, 48. Wenn ich ferner das letzte Glied 96 mit 2^4 dividire, so bekomme ich das 5te Glied vom Ende, 6.

§. 182.

Lehrsatz.

In einer geometrischen Reihe ist das Produkt jeder zwey Glieder, deren eins eben so weit vom Ende als das andere vom Anfange entfernt ist; dem Produkte des ersten und letzten Gliedes gleich.

Beweis. Man setze eine Reihe mit n Gliedern; das erste sey a, der Name m; so ist das letzte Glied $= a.m^{(n-1)}$; also das Produkt des ersten und letzten $= a^2.m^{(n-1)}$. Nun nehme man das p^{te} Glied vom Anfange, so ist dieses $= a.m^{(p-1)}$ (181. S. 1.); und das p^{te} Glied vom Ende, so ist dasselbe $= a.m^{(n-1)-(p-1)}$ (181. S. 2.); also das Produkt aus beyden $= a \times a \times m^{(n-1-(p-1))} \times m^{(p-1)}$ (80) $= a^2.m^{(n-1)-(p-1)+(p-1)}$ (139.) $= a^2 m^{(n-1)}$ also dem Produkte der äußersten Glieder gleich.

Anhang.

Sätze aus der angewandten Arithmetik.

§. 183.

Erklärung.

Eine Zahl in concreto heißt auch eine genannte, und eine Zahl in abstracto auch eine ungenannte Zahl (§. 7.) Bey Vergleichung der genannten Zahlen, womit sich die angewandte Arithmetik beschäftigt (§. 7.) kömmt es darauf an, zu wissen, wie viel Einheiten jeder Art Eine Einheit der nächst höhern Art ausmachen. Die Zahl, welche dies angiebt, heißt die Reduktionszahl. Alle Rechnungsarten geschehen denn nach den in der reinen Arithmetik gegebnen Regeln, und sind Rechnungsarten nach demjenigen Zah-

lensysteme (35), welches die Reduktionszahl angiebt. Wäre z. B. die Reduktionszahl 4, (wie, wenn man Dreyer und Groschen zu vergleichen hätte, (so entstände eine Rechnung nach der Tetraktik (37.); wäre 60 die Reduktionszahl (wie, wenn Stunden, Minuten, Sekunden verglichen werden sollten) so entstände eine Rechnung nach dem Sexagesimalsysteme.

§. 184.

Zusatz 1.

So oft man bey der Addition in einer Kolumne so viel Einheiten bekömmt, daß sie Eine Einheit der nächst höhern Art ausmachen, rechnet man sie in der folgenden Kolumne zu diesen höhern Einheiten hinzu, und setzet in der Summe der vorigen nur das übrige (44.). Z. B.

9 Rthlr.	14 Gr.	9 Pf.
3 —	17 —	11 —
13 Rthlr.	7 Gr.	8 Pf.

§. 185.

Zusatz 2.

Wenn man bey der Subtraktion borgt, so muß man zu den Einheiten, wovon man subtrahiren soll, allemal so viele hinzudenken, als Einheiten dieser Art in der geborgten höhern Einheit enthalten sind (51.). Z. B.

15 Wspl.	10 Schffl.
3 —	22 —
11 Wspl.	12 Schffl.

 §. 186.

§. 186.

Zusatz 3.

Bey der Multiplication ist die Bemerkung §. 184. ebenfalls nicht aus der Acht zu lassen. Z. B.

5 Tage	20 Stunden	23 Minuten
		3
17 T.	13 St.	9 Min.

§. 187.

Zusatz 4.

Bey der Division fängt man am bequemsten bey den Einheiten der höchsten Art an. Den Rest, der etwa bleibt, rechnet man jedesmal, nach gehöriger Reduktion, zu den nächstfolgenden niedrigern Einheiten hinzu. Wenn man z. B. 9 Centner, 17 Pfund, 5 Loth mit 4 dividiren sollte, so würde das Exempel so stehen:

	9 Ctn.	17 Pf.	5 Loth.	
4)	8	110	96	2C. 31 Pf. 25 $\frac{1}{4}$ Loth.
	1	127	101	
		4) 12	4) 8	
		07	21	
		4) 4	4) 20	
		3	1	

§. 188.

Erklärung.

Die Regel, wonach zu drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte ge-

gefunden wird, heißt in der angewandten Rechenkunst die Regel Detri (regula de tribus terminis). Sie ist also nichts anders, als die §. 173. Nr. 2. gegebne Regel. Dasjenige von den drey gegebnen Gliedern, wobey man frägt: welches das gesuchte vierte sey? wird auch die Fragzahl genannt.

§. 189.

Zusatz 1.

Da nur gleichartige Größen in einander enthalten seyn können, die Glieder eines geometrischen Verhältnisses also gleichartig seyn müssen (158.); so müssen auch bey jeder Aufgabe aus der Regel Detri je zwey und zwey Glieder gleichartig seyn. Es muß eins vorhanden seyn, welches mit der Fragzahl, und eins, welches mit dem gesuchten Gliede gleichartig ist; wie Z. B. in der Aufgabe:

5 Ellen — kosten 6 Rthlr. — wieviel Rthlr. kosten 8 Ellen?

Wenn daher die Aufgabe so ausgedrückt ist, daß gedachte Glieder nicht gleichartig sind, so muß man sie erst gleichartig machen. Z. B.

8 Unzen — kosten 5 Rthlr. — wieviel kosten 7 Loth?

Statt dessen setzet man:

16 Loth — 5 Rthlr. — 7 Loth?

§. 190.

Zusatz 2.

Aus eben dem Grunde ist die gemeine Art des Ansatzes eigentlich unrichtig, und das letzte Exempel müßte so stehen:

16 Loth : 7 Loth = 5 Rthlr : gesuchte Zahl.

Das Gesuchte wird indessen, auch bey dem gemeinen Ansatze, richtig gefunden.

§. 191.

Zusatz 3.

Vermittelst der Regel Detri kann man die verschiedenen Gewichte, Münzsorten u. s. f. vergleichen und aufeinander reduciren. Nur muß man einen Reduktionssatz haben, einen Satz, der von irgend einer Anzahl Einheiten der einen Art angiebt, wieviel Einheiten der andern Art sie ausmachen. Sollte man z. B. Gulden und Rthlr. vergleichen, so wäre der Reduktionssatz: 3 Gld. = 2 Rthlr. und wenn man also 223 Gld. hätte und wissen wollte wieviel Rthlr. sie ausmachten; so könnnte man ansetzen

3 Gld. — machen 2 Rthlr. — wieviel 223 Gld.?

§. 192.

Lehrsatz.

Bey jeder Aufgabe der Regel Detri kann man 1) das erste und zweyte Glied, und eben so das erste und dritte Glied gleichvielmal verkleinern; 2) Wenn das erste Glied ein Bruch ist, so kann man

man den bloßen Zähler stehen lassen, und mit dem weggestrichenen Nenner das zweyte oder dritte Glied multipliciren; und eben so, wenn das zweyte oder dritte Glied ein Bruch ist, den Nenner wegstreichen und damit das erste Glied multipliciren.

Beweis. Man setze die Aufgabe:

a — giebt b — was giebt c?

und das Gesuchte sey $= x$, so ist $\frac{a}{bc} = x$ (173.)

Nun kann man b und a, oder auch c und a gleichvielmal verkleinern oder vergrößern, ohne daß x geändert würde (90.). Nach Nr. 1 aber werden gedachte Glieder gleichvielmal verkleinert, und nach Nr. 2 gleichvielmal vergrößert (83. 77.).

§. 193.

Aufgabe.

Zwey Zahlen, A und B, in proportionale Theile zu theilen, auch wenn die Theile der einen vorgeschrieben sind.

Aufl. und Bew. Die vorgeschriebenen Theile von A sind a und b, und x, y die gesuchten Theile von B. Weil sich nun die Theile der B eben so gegen B verhalten sollen, wie die Theile von A sich gegen A verhalten: so hat man

$$A : a = B : x \text{ und}$$
$$A : b = B ; y.$$

Also findet man, nach der Regel Detrie, $x = \frac{aB}{A}$ und $y = \frac{b.B}{A.}$

§. 194.

Zusatz.

Diese Regel, wonach zwey Zahlen in proportionale Theile getheilt werden, heißt in der praktischen Arithmetik die Gesellschaftsregel. Wenn eine Gesellschaft mehrerer Personen eine gewisse Summe zusammengeschlossen und damit einen gewissen Gewinn erworben hat; so muß jeder an diesem Gewinne Antheil haben, nach Verhältniß seines Beytrages zu der zusammengeschossenen Summe. Wer hiezu die Hälfte, oder $\frac{1}{3}$, oder $\frac{1}{4}$ u. s. f. hergegeben hat, der muß auch von dem Gewinne die Hälfte, oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ u. s. f. bekommen. Man findet also (193) wieviel jeder von dem Gewinne bekommt, wenn man ansetzt: Wie die ganze Summe sich verhält zu dem Beytrage desselben, so der ganze Gewinn zu dem Antheile desselben. Z. B.

Beitrag des ersten	= 24 Rthlr.	Der ganze erworbene Gewinn = 60 Rthlr.
: : : zweyten	= 16 ——	
: : : dritten	= 8 ——	
ganze Summe	= 48 Rthlr.	

Also hat man:

$48 : 24 = 60 :$ Antheil des ersten
$48 : 16 = 60 :$: : : zweyten
$48 : 8 = 60 :$: : : dritten.

Wenn man die einzelnen Beyträge und die ganze Summe, oder auch die ganze Summe und den ganzen Gewinn gleich vielmal verkleinern kann; so wird doch das Resultat richtig gefunden (192.)

§. 195.

Aufgabe.

Sachen von geringerm Werthe mit Sachen von größerm Werthe so zu vermischen, daß jede Sache von der gemischten Art einen vorgeschriebenen mittlern Werth habe.

Auflösung. Man nenne das, worum der Werth einer Sache der schlechtern Art geringer ist, als der vorgeschriebene mittlere Werth, ihr Deficit, und das, worum der Werth einer Sache der bessern Art den vorgeschriebenen mittlern Werth übertrifft, ihren Ueberschuß. Wenn alsdann bestimmt ist, wie viel Sachen der schlechtern Art man nehmen will oder soll, so findet man nach der Regel Detri, wie viele von den bessern man hinzuthun muß, wenn man ansetzt:

Ueberschuß : Deficit = Anzahl der schlechtern Sachen : gesuchte Anzahl der bessern.

Ist umgekehrt die Anzahl der bessern bestimmt und man sucht die Anzahl der schlechtern, so setzt man an:

Deficit : Ueberschuß = Anzahl der bessern Sachen : gesuchten Anzahl der schlechtern:

Beweis. Es wird gefordert, daß, wenn man, nach der Vermischung, einer jeden Sache den vorgeschriebenen mittlern Werth giebt, zusammen eben so viel herauskomme, als der Werth aller zusammengemischten Sachen für sich beträgt. Es sey nun der mittlere Werth = P; das Deficit

ficit = D; der Ueberschuß = S: die Anzahl der schlechtern Sachen = m, der bessern = n. Alsdann ist der Werth aller schlechtern Sachen = $m(P - D) = mP - mD$, und der Werth aller bessern $n(P + S) = nP + nS$. Nach der Vermischung hat man $m + n$ Sachen, und wenn man jeder den mittlern Werth P giebt, so ist der gesammte Werth = $mP + nP$. Also es wird gefordert, daß $mP + nP = mP - mD + nP + nS = mP + nP + nS - mD$ sey.

Wenn nun, wie die Auflösung vorschreibt, $S : D = m : n$ ist; so ist $nS - mD$ (171) also $nS - mD = 0$, also $mP + nP + nS - mD = mP + nP$.

§. 196.

Zusatz.

Man hat z. B. Wein, wovon die Kanne 8 Gr. kostet, und andern, wovon die Kanne 18 Gr. kostet, und will ihn so vermischen, daß die Kanne 12 Gr. zu stehen kommt. Von den schlechtern sind 30 Kannen vorhanden, und die Frage ist, wieviel man von dem guten zugießen müsse. Hier ist $P = 12$; $D = 4$; und $S = 6$. Also sezt man an

$6 : 4 = 30$: gesuchte Anzahl der Kannen des bessern Weines. Diese Anzahl ist also = $\frac{4.30}{6} = 20$.

Die vorgetragene Regel heißt in der praktischen Rechenkunst die Vermischungsregel.

§. 197.

§. 197.

Erklärung.

Es giebt Fälle, wo die gesuchte Zahl im umgekehrten Verhältnisse mit der Fragezahl wächst, d. i. sie wird so vielmal kleiner als die Fragezahl größer wird, und so vielmal größer als die letztere kleiner wird. Ob dies bey einer Aufgabe der Fall sey, oder nicht? muß aus der Beschaffenheit der Sachen beurtheilt werden, von denen die Rede ist, und ist eine Frage, die der Mathematik nicht angeht. Die Regel aber, wonach dergleichen Aufgaben berechnet werden, heißt die **umgekehrte** Regel Detrie.

§. 198.

Aufgabe.

Eine Aufgabe der umgekehrten Regel Detri zu berechnen.

Auflösung. Multiplicire das erste und zweyte Glied, und was herauskömmt dividire mit der Fragezahl.

Beweis. Die Aufgabe sey:

a — giebt b — was giebt a?

so ist die Antwort offenbar: b. Wird nun die Fragezahl $= ma$, so wird die gesuchte $= \frac{1}{m} b$ (197.). Also hat man: $ma : a = b : \frac{1}{m} b$; also $\frac{1}{m} b = \frac{a . b}{ma}$ (173).

Man

Man setze z. B.

4 Arbeiter — brauchen zu einer gewissen Arbeit 12 Tage — wieviel Tage brauchen zu derselben 15 Arbeiter?

Die Antwort ist: $\frac{4 \cdot 12}{15}$ Tage $= 3\frac{1}{5}$ T.

§. 199.

Erklärung.

Die zusammengesetzte Regel Detrie ist die Regel zur Berechnung der Aufgaben, die mehr als eine Fragezahl (also auch mehrere mit demselben gleichartige Zahlen im ersten Gliede) enthalten. Sie heißt insbesondre die Regel quinque, oder septem, wenn zwey oder drey Fragezahlen gegeben sind.

§. 200.

Aufgabe.

Ein Exempel nach der zusammengesetzten Regel Detri zu berechnen.

Auflösung. Nimm das Produkt aller Fragezahlen als Fragezahl, oder, als drittes Glied; und das Produkt aller Zahlen im ersten Gliede als erstes Glied an, und verfahre dann, wie gewöhnlich.

Beweis. Man setze:

das Kapital a
in der Zeit m — giebt die Summe b Zinsen —

Wieviel giebt das Kapital c?
in der Zeit n?

Wäre

Wäre das zweyte Kapital, wie das erste, auch auf die Zeit m ausgethan, so würden sich (da hier gleiche Procente vorausgesetzt werden) die Zinsen verhalten wie die Kapitale. Man könnte also ansetzen: a giebt b; wieviel c? und die Antwort wäre $\frac{b.c}{a}$. Nun will man aber wissen, wieviel c in der Zeit n gebe? und weil sich die Zinsen auch verhalten, wie die Zeiten, so hat man:

In der Zeit m — $\frac{b.c}{a}$ Zinsen — wieviel in der Zeit n?

Die Antwort ist also: $\frac{bcn}{am}$; welches die gegebne Regel ist. — Anstatt Kapital, Zinsen, Zeit, können eben so Größen von andrer Art gesetzt werden.

§. 201.

Zusatz.

Die zusammengesetzte Regel Detri ist also nur eine Abkürzung. Es sind eigentlich mehrere Proportionen verhanden, die man, wie in dem Beweise, jede für sich berechnen müßte. — Wenn z. B. die Aufgabe ist:

200 Rthlr. in 14 Mon. — geben 15 Rthlr. Zins — Wieviel 90 Rthl.? in 9 Monat?

so ist die Antwort: $\frac{15.90.9}{200.14}$ Rthlr.

§. 202.

§. 202.

Erklärung.

Die Kettenregel oder Regel multiplex ist die Regel Detri, auf diejenigen Aufgaben angewandt, die zwar nur Eine Fragezahl, aber mehr als drey Glieder enthalten, die aufeinander reducirt werden müssen.

§. 203.

Aufgabe.

Exempel dieser Art zu berechnen.

Auflösung. Setze die Aufgabe folgendergestalt an. Die erste Stelle linker Hand bleibt leer für die gesuchte Zahl; in die erste Stelle rechter Hand kömmt die Fragezahl; das übrige aber muß so angeordnet werden, daß jede folgende Reihe mit der Größe von eben der Art anfängt, womit die vorhergehende aufhört. Wenn man alsdann das Produkt aller Zahlen in der Kolumne rechter Hand durch das Produkt aller Zahlen in der Kolumne linker Hand dividirt; so hat man das Gesuchte.

Beweis. Man setze:

Wieviel Rthlr. — kosten —		27 Brab. Ellen.
Wenn 5 Br. Ellen	=	6 Hamb. Ellen.
und 11 Hamb. Ell. kosten		14 Spec.
und 3 Spec.	=	4 Rthlr.

Weil nun für Hamburger Ellen ein Preis angegeben ist, so muß man die 27 Brabander

Ellen

Ellen erst auf Hamburger Ellen reduciren. Dazu hat man in der zweyten Reihe den Reduktionssatz; und man kann ansetzen:

5 Br. Ell. — geben 6 Hamb. Ell. — wieviel 27 Br. Ellen?

und die Antwort ist: $\frac{27.6}{5}$ Hamb. Ell. Nun ist also die Frage, wieviel diese Hamb. Ell. kosten? Dies findet man, wenn man, nach Angabe der dritten Reihe, ansetzt:

11 Hamb. Ell. — kosten 14 Spec. — wieviel $\frac{27.6}{6}$ Hamb. Ellen?

Antwort: $\frac{27.6.14}{5.11}$ Spec. Weil nun aber der Preis in Rthlr. angegeben werden sollte, so muß man diese Spec. noch auf Rthlr. reduciren, und also, nach Angabe der letzten Reihe, ansetzen:

3 Spec. — geben 4 Rthlr. — wieviel $\frac{27.6.14}{5.11}$ Spec.?

und man findet, nach der Regel Detri, $\frac{27.6.14.4}{5.11.3}$ Rthlr.

Also $\frac{27.6}{5}$ Hamb. Ell. oder 27 Brab. Ell. kosten $\frac{27.6.14.4}{5.11.3}$ Rthlr. Bey dieser Zahl aber ist das Dividendum das Produkt aller Zahlen in der Kolumne rechter Hand, und der Divisor das Produkt aller Zahlen in der Kolumne linker Hand; welches die gegebne Regel ist.

Anstatt der hier (in concreto, zur Erleichterung) angenommenen Zahlen und Größen, kann man beliebig jede andere setzen.

Zweytes Buch.
Ebene Geometrie.

Erster Abschnitt.
Von der Gleichheit ausgedehnter Größen.

I.
Von den Punkten, Linien und Winkeln.

§. 1.
Erklärung.

Ein Punkt ist, was gar keine Ausdehnung hat; was nur eine Ausdehnung hat, ist eine Linie; was nur zwey Ausdehnungen hat, ist eine Fläche; und was nach allen Seiten ausgedehnt und begrenzt ist, ist ein Körper.

Anmerkung 1.

Da die reine Geometrie an den Körpern in der Natur weiter nichts betrachtet, als ihre ausgedehnte Größe; so ist auch für sie ein Körper weiter nichts, als ein nach allen Seiten ausgedehnter und begrenzter Raum. Die Grenzen, welche einen Körper umgeben, sind seine Oberflächen, oder Flächen. Grenzen einer Fläche sind Linien, und Grenzen einer Linie sind Punkte. Die eine Ausdehnung, die sich an einer Linie findet, heißt Länge, die zweyte, welche bey einer Fläche hinzukömmt, Breite, und die dritte, welche ein

ein Körper überdem noch hat, Höhe (Tiefe, Dicke).

Anmerkung. 2.

Was eine gerade und eine krumme Linie heiße, ist für sich klar.

§. 2.

Forderungssatz.

Von jedem Punkte und jedem andern eine grade Linie zu ziehen, und jede grade Linie an beyden Seiten noch zu verlängern.

§. 3.

Zusatz 1.

Wenn man eine grade Linie verlängert hat, so kann man diese verlängerte, weil sich eine jede verlängern läßt, wieder verlängern, und die dann entstehende wieder, und das so fort, so lange man will: man kömmt nie auf einen Punkt, wo sich nichts mehr hinzusetzen ließe. Das nennen einige: man kann eine grade Linie ins Unendliche verlängern, womit also nicht gesagt seyn soll, daß man sie unendlich lang machen könne.

§. 4.

Zusatz 2.

Die ausgedehnte Größe ist eine stätige Größe. In der graden Linie AB. ist das Ende des ersten Theiles, der Punkt c, zugleich der Anfang des nächstfolgenden. Denn widrigenfalls, wenn ein andrer Punkt, Fig. 1.

 d,

d, der Anfang des nächstfolgenden Theiles wäre, so gäbe es zwischen dem ersten Theile und dem nächstfolgenden auch die grade Linie cd, (§. 2.) welche auch ein Theil von AB wäre. Also wäre der nächstfolgende Theil nicht der nächstfolgende.

§. 5.

Zusatz 3.

Die Endpunkte, A und B, einer jeden
Fig. 2. geraden Linie, AB, müssen andre Punkte seyn, als der Mittelpunkt derselben, C; weil widrigensfalls nur ein Punkt und gar keine Linie vorhanden wäre. Also zwischen dem Endpunkte einer jeden graden Linie und ihrem Mittelpunkte giebt es eine grade Linie (§ 2), oder, die Hälfte einer jeden graden Linie, AB, ist auch eine grade Linie, AC. Folglich die Hälfte von AC. ist wieder eine grade Linie, Am, und die Hälfte von Am wieder und so ohne Ende. Man kömmt also nie auf einen Theil, der ein bloßer Punkt wäre, und die Linie besteht nicht aus Punkten, als ihren Theilen. Auch sind Punkte nur Grenzen der Linie, setzen also die Linien schon voraus und können also nicht Theile derselben seyn.

Aus diesem letztern Grunde erhellet auch, daß keine Fläche aus Linien, als aus ihren Theilen bestehen kann, und daß sich kein Körper aus Flächen zusammensetzen läßt.

§. 6.

§. 6.

Grundsatz.

Zwischen zweyen Punkten giebt es nur Eine gerade Linie. Jede andre Linie zwischen diesen Punkten, die von der graden abweicht, ist eben darum nicht grade.

§. 7.

Zusatz.

Zwey grade Linien schließen keinen Raum ein: uud können sich nur in Einem Punkte schneiden und berühren.

§. 8.

Grundsatz.

Die grade Linie zwischen zweyen Punkten ist unter allen die kürzeste. Alle andern, sich nicht durchschneidenden Linien zwischen denselben sind um so länger, je weiter sie von der graden abweichen.

§. 9.

Erklärung.

Die Entfernung eines Dinges von einem andern ist der kürzeste Weg von dem einem zum andern.

§. 10.

Zusatz.

Die Entfernung zweyer Punkte von einander ist die grade Linie zwischen ihnen.

§. 11.

Erklärung.

Ausgedehnte Größen passen aufeinander wenn man sie so aufeinander legen kann, daß alle ihre Gränzen in einander fallen.

§. 12.

Grundsatz.

Größen die aufeinander passen, sind einander gleich.

§. 13.

Zusatz.

Wenn grade Linien nicht aufeinander passen, so sind sie ungleich. Also gleiche grade Linien passen aufeinander.

§. 14.

Erklärung.

Eine Fläche ist eben (eine Ebene) wenn die grade Linie zwischen jeden zwey Punkten in derselben ganz in ihr liegt, (nicht über oder unter der Fläche weg läuft. Eine Fläche ist krumm, wenn sie keine ebenen Theile hat.

§. 15.

Erklärung.

Ein gradlinichter Winkel (oder hier ein Winkel schlechthin) ist die Neigung Fig 3. zweyer zusammenlaufenden graden Linien gegen einander. Der Punkt, A, worin

sie zusammenlaufen, ist die Spitze des Winkels, und die graden Linien BA und CA, selbst, sind seine Schenkel. Wenn man einen Winkel, BAC, benennt, so setzt man immer den Buchstaben, der an der Spitze stehet, in die Mitte. Auch kann man einen Winkel, durch einen einzelnen Buchstaben bezeichnen, den man in denselben setzt. Der Winkel BAC kann auch der Winkel m heißen.

§. 16.

Zusatz 1.

Wenn man drey Punkte, B, A, C hat, die nicht in grader Linie liegen; so kann man einen Winkel machen. Denn man kann die geraden Linien BA und CA ziehen (§. 2.). Fig. 3.

§. 17.

Zusatz 2.

Gradlinichte Winkel, die nicht aufeinander passen, sind ungleich. Alle gleiche, gradlinichte Winkel passen also aufeinander.

§. 18.

Erklärung.

Nebenwinkel heißen die beiden neben einander liegenden Winkel, die eine grade Linie mit einer andern formirt. CD formirt mit AB die Nebenwinkel ADC und CDB. Ein rechter Winkel EHG, ist, der seinen Nebenwinkel gleich Fig. 4 u. 5.

 ist

ist: jeder andere ist schief. Eine grade Linie GH steht auf einer andern, EF, senkrecht, (ist ein Perpendikel,) wenn sie mit ihr rechte Winkel formirt; sonst stehet sie schief auf derselben, wie CD auf AB wenn die Winkel ADC, CDB keine rechte, sondern schiefe sind. Ein rechter Winkel werde kurz durch R bezeichnet. Die schiefen Winkel sind entweder spitz oder stumpf, je nachdem sie kleiner odeer größer sind als ein rechter. Der spitze Winkel der zu einem andern noch hinzu kommen muß, wenn ein rechter daraus werden soll, heißt dessen Ergänzung. Auch ist der Winkel das Maaß der übrigen.

§. 19.

Lehrsatz.

Fig. 6. Jede zwey Nebenwinkel, ADC + CDB, sind zusammen eben so groß, als jede zwey andere, ADE + EDB.

Beweis. Beide Paare bestehen aus einerley Theilen, o, p und q.

§. 20.

Lehrsatz.

Fig. 7. Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Beweis. Man setze: es gebe ungleiche rechte Winkel, und es sey der rechte Winkel ADE größer als der rechte Winkel ADC; so ist auch (§. 18.). der Nebenwinkel des erstern größer, als ADC und (18) als dessen Nebenwinkel.

Folg-

Folglich ADE + EDB > ADC + CDB; welches unmöglich ist (§. 21.).

§. 21.

Lehrsatz.

Jede zwey Nebenwinkel auf einer graden Linie, ADE + EDB, sind zusammen zweyen rechten Winkeln gleich. Fig. 7.

Beweis. Wenn ADC, CDB rechte Winkel sind; so ist ADE + EDB = ADC + CDB (21.) = 2 R.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß alle Winkel, die um einen Punkt herum liegen, zusammen vier rechte betragen, so viel es auch seyn mögen.

§. 22.

Lehrsatz.

Wenn zwey Winkel, die eine gemeinschaftliche Spitze, und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, zusammen zwey rechte ausmachen; so liegen ihre beiden andern Schenkel in grader Linie. Fig. 4.

Beweis. Es sey ADC + CDB = 2 R. Wenn alsdann ADB keine grade Linie wäre, so sey auch ADE eine grade Linie. Alsdann ist auch ADC + CDE = 2 R (23), folglich CDB = CDE; welches unmöglich ist (Arithm. §. 19.)

§. 23.

Lehrsatz.

Fig. 7. In keinem Punkte einer geraden Linie können mehr als ein Perpendikel stehen.

Beweis. Wenn DC ein Perpendikel wäre, und DE auch; so wäre ADC = R und ADE = R (18) und ADC < ADE; gegen §. 22.

§. 24.

Erklärung.

Fig. 8. Scheitelwinkel (Vertikalwinkel) sind die entgegengesetzten Winkel, die entstehen, wenn sich zwey grade Linien durchschneiden; wie AED und CEB.

§. 25.

Lehrsatz.

Fig. 8. Alle Scheitelwinkel sind gleich groß.

Beweis. Weil AED + BED = 2 R (23) und CEB + BED auch = 2 R; so ist AED + BED = CEB + BED, folglich AED = CEB.

§. 26.

Lehrsatz.

Fig. 8. Wenn AB eine grade Linie ist, und die entgegengesetzten Winkel AED und CEB gleich sind, so ist CD auch eine grade Linie.

Beweis. Widrigenfalls werde CE nach F verlängert und es sey CF eine grade Linie; so ist

ist auch AEF = CEB (§. 27), folglich AEF = AED; welches unmöglich ist.

II.

Von dem Triangeln.

§. 27.

Erklärung.

Eine ebene, von allen Seiten begrenzte, Fläche ist eine ebene Figur; welche hier schlechthin eine Figur heißen soll. Die Linien, von welchen sie begrenzt wird, werden ihre Seiten, und sie selbst eine gradlinichte, krummlinichte oder vermischtlinichte Figur genannt, je nachdem ihre Seiten grade oder krumme Linien, oder beydes untereinander, sind.

§. 28.

Zusatz

Es giebt keine gradlinichte, zweyseitige Figur (§. 7.).

§. 29.

Erklärung.

Ein Dreyeck (Triangel) ist eine Figur, die drey Seiten hat. Wenn von einem Dreyecke schlechthin die Rede ist, so werde immer das gradlinichte verstanden. Eine Figur mit vier Seiten ist ein Viereck. Alle Figuren die mehr als vier Seiten haben, heißen überhaupt Vielecke (Polygone). Ein Dreyeck ist gleichschenklicht,

wenn

wenn zwey Seiten desselben, und gleichseitig, wenn alle drey Seiten gleich groß sind.

§. 30.

Zusatz.

Fig. 9. Ein Dreyeck ist möglich. Denn, wenn man den Winkel ABC hat, so kann man (§. 2.) die grade Linie AC ziehen.

§. 31.

Erklärung.

Fig. 10. Eine krumme Linie, die um einen gewissen Punkt C, so herumgeht, daß sie in allen ihren Punkten gleichweit von demselben entfernt bleibt, heißet eine Kreislinie; die von ihr eingeschlossene Figur, ein Kreis (eine Kreisfläche), C der Mittelpunkt, und die krumme Linie selbst die Peripherie des Kreises. Ein Theil der Peripherie, z. B. ADB heißet ein Bogen; die grade Linie zwischen den Entpunkten eines Bogens, wie z. B. AB, eine Sehne; und wenn dieselbe durch den Mittelpunct gehet, wie EF, ein Durchmesser (Diameter). Ein Halbmesser (radius) ist die grade Linie aus dem Mittelpuncte in die Peripherie, wie (EF, oder CF). Ein Theil der Kreisfläche, der von einem Bogen und seiner Sehne eingeschlossen wird, ist ein Kreisabschnitt (Segment), wie z. B. ADB; ein Kreisausschnitt (Sector) aber ist ein solcher Theil der Kreisfläche, der von einem Bogen und den Halbmessern eingeschlossen wird, die in die Endpunkte desselben gehen, z. B. GFC.

§. 32.

Zusatz.

Alle Halbmesser eines Cirkels sind gleich groß; ingleichen auch alle Durchmesser, da ein Durchmesser das Duplum vom Halbmesser ist.

§. 33.

Forderungssatz.

Aus jedem Punkte in einer Ebene mit jedem Halbmesser einen Kreis zu verzeichnen.

§. 34.

Zusatz.

Vermittelst des Cirkels kann man mehrere grade Linien gleich lang machen; oder, von einer, die eine unbestimmte Länge hat, allemal ein Stück abschneiden, welches einer andern, vorgeschriebenen, gleich ist.

§. 35.

Lehrsatz.

In einem Triangel, ABC, sind jede zwey Seiten, AC und BC, zusammengenommen größer, als die dritte, AB. Fig. 9.

Beweis. AB ist die grade Linie zwischen A und B; AC und BC aber machen zwischen denselben Punkten die gebrochene Linie ACB aus; folglich AC + BC > AB (§. 8.).

§. 36.

Aufgabe.

Fig. 9. Aus drey gegebnen Linien, a, b, c, wovon jede zwey zusammen größer sind als die dritte, einen Triangel zu machen.

Auflösung. Mache AC = a (34.). Aus A verzeichne einen Cirkel (oder nur einen Bogen davon) mit dem Halbmesser b (33.), und aus C einen Cirkel (oder Bogen) mit dem Halbmesser c. Von dem Durchschnittspunkte der Cirkel, B, ziehe grade Linien (2.) nach A und C; so ist ABC der verlangte Triangel.

Beweis. AB ist ein Halbmesser des ersten, mit dem Halbmesser b verzeichneten, Cirkels; also AB = b (32.); und CB ist ein Halbmesser des andern, mit dem Halbmesser c verzeichneten, Cirkels; folglich auch CB = c. Da nun überdem AC = a gemacht ist, so sind die Seiten des Triangels den gegebnen Linien gleich.

§. 37.

Zusatz.

Man bekömmt ein gleichschenklichtes Dreyeck, wenn man die Kreise aus A und C mit einerley Halbmesser verzeichnet; und verzeichnet man sie mit dem Halbmesser AC; so wird das Dreyeck gleichseitig. Man kann also über jeder gegebnen Linie ein gleichschenklichtes, und ein gleichseitiges Dreyeck errichten.

§. 38.

Lehrsatz.

Wenn die Peripherien zweyer Kreise sich in zwey Punkten A und B durchschneiden, oder überhaupt zwey Punkte gemein haben; so haben sie auch eine gemeinschaftliche Sehne, AB. Fig. 11.

Beweis. Daß man allemal diese grade Linie AB ziehen kann, erhellet aus §. 2., und daß sie eine Sehne beyder Kreise sey, aus §. 31.

§. 39.

Lehrsatz.

Wenn zwey Kreise in zwey Punkten C, D zusammenlaufen, die zwischen den Mittelpunkten A, B liegen, so gehet die grade Linie zwischen den Mittelpunkten durch keinen Endpunct der gemeinschaftlichen Sehne CD. Fig. 12.

Beweis. Wenn die grade Linie von A nach B etwa durch D ginge, und also ADB diese grade Linie wäre; so ziehe AC und CB: so ist ACB eine gebrochene Linie zwischen A und B (§. 6.). Folglich ACB > ADB (§. 8.). Nun ist AC = AD, CB = DB (31.); folglich ACB = ADB; welches sich widerspricht.

§. 40.

Zusatz 1.

Noch weniger kann die grade Linie von A nach B um die Endpunkte der Sehne CD herumgehen, wie etwa AFGB, weil hier gar ACB > AF + FG + GB seyn würde.

§. 41.

Zusatz 2.

Also die grade Linie zwischen den Mittelpuncten durchschneidet die gemeinschaftliche Sehne zwischen ihren Endpunkten.

§. 42.

Lehrsatz.

Wenn zwey Kreise m und n in zwey Punkten CD zusammen laufen, die nicht zwischen den Mittelpuncten A und B liegen, so gehet die grade Linie, welche durch die Mittelpunkte läuft, durch keinen Endpunkt der gemeinschaftlichen Sehne CD.

Fig. 13.

Beweis. Wenn BA durch D ginge und also BAD eine grade Linie, mithin (§. 31.) ein Halbmesser von m wäre; so ziehe AC, so ist BAC keine grade Linie (§. 7.), also größer als die grade BC (§. 8.) welche letztere auch ein Halbmesser von m ist. Da nun BA = BA, AD, AC (§. 32), also BAD = BAC ist; so ist auch BAD > BC. Folglich wären die Halbmesser von m ungleich, gegen §. 32.

§. 43.

Zusatz 1.

Noch weniger kann die grade Linie durch B und A um die Endpuncte von CD weggehen, wie etwa BAGE, weil hier noch mehr der Halbmesser BAGE > BC seyn würde.

§. 44.

Zusatz 2.

Die grade Linie also, welche durch die Mittelpuncte läuft, muß die gemeinschaftliche Sehne zwischen den Endpunkten durchschneiden.

§. 45.

Lehrsatz.

Die Peripherien zweyer Kreise können nur in zwey Punkten C und D zusammenlaufen, von denen der eine über und der andere unter der graden Linie liegen muß, welche durch die Mittelpuncte gehet.

Fig. 14. 15.

Beweis. C und D liegen entweder zwischen den Mittelpuncten A und B, oder nicht.

Im ersten Falle (Fig. 14.) ziehe CD; so gehet die grade Linie AB durch CD (§. 41.); also liegt C über und D unter AB. Ueber AB kann es nun weiter keinen Punkt geben, worin beide Peripherien zusammenlaufen. Denn, wenn es einen solchen Punkt, E, gäbe, so wäre CE eine gemeinschaftliche Sehne (§. 38.), und die grade Linie von A nach B ginge auch durch CE (§. 41.) und wäre etwa AFC; also zwischen A und B wären zwey verschiedene grade Linien, gegen §. 6. Eben so erhellet, daß es auch unter AB weiter keinen Durchschnittspunct giebt.

Im andern Falle (Fig. 15.) ziehe CD; so gehet die grade Linie durch B und A auch durch CD (§. 44.) etwa nach E. Also liegt wiederum

C über, und D unter derselben. Gäbe es nun über derselben noch irgend einen Punkt F, worin beide Kreise zusammen kämen, so hätte man die gemeine Sehne CF (§. 38.). Folglich ginge BA auch durch CF (§. 44.) etwa nach G. Also wäre BAE eine grade Linie und BAG auch; welches unmöglich ist (§. 7.).

§. 46.

Lehrsatz.

Wenn die Seiten zweyer Triangel gleich sind, DE = AB, DF = AC, EF = BC; so sind die Triangel selber, und die Winkel gleich, die den gleichen Seiten gegenüber stehen.

Fig. 16.

Beweis. Aus A verzeichne einen Bogen, m, mit dem Halbmesser AC = DF; und aus B einen Bogen, n, mit dem Halbmesser BC = EF; so durchschneiden sich beide Bogen in dem Punkte C und können über AB keinen andern Punkt gemein haben (§. 45.). Lege DE auf AB, nämlich D in A und E in B (§. 13); so fällt F in den Bogen m, weil DF ein Halbmesser davon ist und D im Mittelpunkte liegt; imgleichen fällt F auch in den Bogen n, weil EF ein Halbmesser desselben ist und E im Mittelpunkte liegt (§. 32.). Also fällt F in C; mithin fällt DF mit AC und EF mit BC zusammen (§. 6.). Also passen die Dreyecke auf einander (§. 11.); imgleichen paßt der Winkel D auf den Winkel A, F auf C und E auf B.

Zusatz.

Zusatz.

Wenn demnach in zwey Dreyecken zwey Paar Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind; so ist das dritte Paar Seiten ungleich. Sonst wären alle drey Paar Seiten; folglich auch jene Winkel gleich groß.

§. 47.

Aufgabe.

An eine gegebene grade Linie DF, in einem vorgeschriebenen Punkte, F, einen Winkel zu legen, der einem gegebenen C, gleich sey.

Auflösung und Beweis. Ziehe willkührlich AB. Mache FD = CA, und errichte das Dreyeck DEF, so, daß FE = CB, DE = AB (§. 36.). Alsdann ist DFE = ACB (§. 46.). Fig. 16.

§. 48.

Erklärung.

Wenn von der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks schlechthin die Rede ist, so werde darunter die Seite verstanden, welche nicht zu den gleichen Schenkeln gehört.

§. 49.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie, CD, aus der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks die Grundlinie AB halbirt, so halbirt sie auch das ganze Dreyeck, den Winkel in der Spitze und stehet auf der Grundlinie senkrecht. Fig. 17.

Beweis. Es ist AD = DB, weil AB halbirt ist; ferner AC = BC, weil ACB gleichschenklicht ist, und CD = CD. Also △ ACD = △ DCB (§. 46.); ferner der Winkel ACD = dem Winkel DCB (§. 46.). Eben so ist CDB = CDA und daher CD senkrecht auf AB (§. 18.).

§. 50.

Zusatz.

Weil auch aus demselben Grunde CBD = CAD, oder, CBA = CAB ist, so sind die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyeckes einander gleich. Wenn also das Dreyeck gleichseitig ist, so sind alle Winkel desselben gleich groß.

§. 51.

Lehrsatz.

Ein Perpendikel in dem Mittelpunkte, D, der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks gehet durch die Spitze, C.

Fig. 17.

Beweis. Denn, wäre DE ein Perpendikel, so könnte man DC ziehen, und diese wäre auch senkrecht (§. 49.); welches nicht möglich ist (§. 25.).

§. 52.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie den Winkel, C, in der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks halbirt, so halbirt sie auch die Grundlinie,

Fig. 17.

linie, und hat also auch die übrigen §. 49. erwähnten Eigenschaften.

Beweis. Wenn CF den Winkel C halbirte und nicht durch den Mittelpunkt der Grundlinie, D, ginge, so könnte man CD ziehen, und diese würde den Winkel C auch halbiren. Also wäre die eine Hälfte ACF kleiner als die andre ACD; welches sich widerspricht.

§. 53.

Aufgabe.

Einen gegebnen Winkel CAB zu halbiren.

Aufloͤsung. Mache AB = AC, ziehe BC, errichte über BC ein gleichschenklichtes Dreyeck BDC (§. 37). und ziehe AD; so ist BAD = CAD. Fig. 18.

Beweis. Weil AB = AC, BD = CD, AD = AD ist, so ist ΔABD = ΔACD (§. 46.) und BAD = CAD (§. 46.).

§. 54.

Aufgabe.

Eine grade Linie, AB, zu halbiren.

Auflösung. Errichte über AB willkührlich ein gleichschenklichtes Dreyeck ACB (§. 37.); halbire (§. 53.) den Winkel C mit einer graden Linie CD; so ist auch AB halbirt. Fig. 19.

Beweis. Erhellet aus §. 52.

§. 55.

Aufgabe.

In einem vorgeschriebenen Punkte C einer graden Linie AB einen Perpendikel zu errichten.

Auflösung. Mache CD = CE, errichte über DE ein gleichschenklichtes Dreyeck DFE (§. 37.) und ziehe FC; so ist diese der verlangte Perpendikel.

Fig 20.

Beweis. Erhellet aus §. 49.

§. 56.

Aufgabe

Auf eine unbegrenzte grade Linie AB aus einem vorgeschriebenen Punkte C einen Perpendikel herabzulassen.

Auflösung. Aus C beschreibe willkührlich einen Kreis, der AB in E und F schneidet. Halbire (§. 54.) EF in D und ziehe CD, so ist diese der verlangte Perpendikel.

Fig. 21.

Beweis. Ziehe CE, CF; so ist CE = CF (§. 31.) also das Dreyeck ECF gleichschenklicht. Weil nun CD aus der Spitze in den Mittelpunkt der Grundlinie gehet, so steht CD senkrecht (§. 49.).

§. 57.

Lehrsatz.

Wenn zwey Seiten eines Triangels so groß sind als zwey Seiten eines andern und die von diesen Seiten eingeschlossene

Fig. 16.

Winkel gleich sind; so sind die Triangel selber, imgleichen das dritte Paar ihrer Seiten, und diejenigen Winkel gleich, die den gleichen Seiten gegenüber stehen.

Beweis. Es sey D = A, DE = AB, DF = AC; so paßt D auf A (§. 17.), auch fallen die Endpunkte der Schenkel zusammen, E in B, und F in C (§. 13), also auch EF fällt in BC (§. 6.). Also passen die Dreyecke aufeinander (§. 11.), imgleichen passet EF auf BC; F auf C und E auf B.

§. 58.

Erklärung.

Der Winkel, welcher entsteht, wenn man eine Seite eines Triangels verlängert, wie CBD, heiße ein äußerlicher Winkel, oder Außenwinkel am Triangel. Fig. 22.

§. 59.

Lehrsatz.

An jedem Triangel, ACB, ist jeder Außenwinkel, CBD, größer als jeder von den gegenüberstehenden innern, C oder A. Fig. 22.

Beweis. Halbire (§. 54.) CB in F, ziehe AF und verlängere sie, bis FG = AF wird. Ziehe GB. Weil nun AFC = BFG (§. 27.), AF = FG, und CF = BF; so ist auch FBG = C (§. 57.); und, da ABD > FBG ist, so ist auch ABD > C.

Wenn man ferner CB nach H verlängert; so erhellet eben so, daß ABH > A ist. Folglich (§. 27.) ist auch CBD > A.

§. 60.

Lehrsatz.

Fig. 22. Jede zwey Winkel in einem Triangel, A und B, sind zusammen < 2 R.

Beweis. Wenn man AB verlängert, so ist CBD + B = 2 R (§. 32.). Da nun A < CBD (§. 59.), so ist A + B < 2 R.

§. 61.

Zusatz 1.

In einem Triangel kann nur ein Winkel ein rechter, und nur einer ein stumpfer Winkel seyn; die beiden andern sind spitz. Ein Triangel der einen rechten Winkel hat, heißt ein rechtwinklichter, der einen stumpfen hat, ein stumpfwinklichter, und der lauter spitze Winkel hat, ein spitzwinklichter Triangel. Im rechtwinklichten Triangel heißen die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, Katheten, und die, welche ihm gegenüber stehet, die Hypothenuse.

§. 62.

Zusatz 2.

Aus einem Punkte kann auf einerley grade Linie nur ein Perpendikel gefällt werden.

§. 63.

Lehrsatz.

Im gleichschenklichten Dreyecke gehet der Perpendikel aus der Spitze auch durch den Mittelpunkt D der Grundlinie AB. Fig. 17.

Beweis. Wenn das nicht wäre, und wenn etwa CF ein Perpendikel wäre, so könnte man auch CD ziehen, und diese stände auch senkrecht (§. 49.), gegen §. 62.

§. 64.

Zusatz.

Der gedachte Perpendikel halbirt also auch das ganze Dreyeck und den Winkel in der Spitze (§. 49.)

§. 65.

Aufgabe.

Ueber jeder gegebnen Seite, AB, einen Triangel zu errichten, worin die beiden an AB anliegenden Winkel, x und y, zusammen zweyen rechten so nahe kommen, daß ihr Unterschied davon weniger beträgt, als jeder gegebne noch so kleine Winkel, w.

Auflösung. Verlängere AB nach C und mache (§. 47.) CAD = w, welches da w gegeben ist, möglich seyn muß. Aus einem beliebigen Punkte in AD ziehe FB; so ist AFB der verlangte Triangel.

Beweis. Es ist $2R - x = CAD$ (§. 23.) $= w$; $2R - (x + y) < w$.

Zusatz.

Wenn also zwey gebene Winkel zweyen rechten auch noch so nahe kommen, so kann doch allemal $x + y$ zweyen rechten noch näher kommen und also größer werden, als die gegebenen.

§. 66.

Lehrsatz.

In jedem Triangel ABC, stehet der größern Seite BC auch ein größerer Winkel gegenüber, als der kleinern Seite BA.

Fig. 24.

Beweis. Da $BC > BA$, so nimm (§. 34.) $BD = BA$, und ziehe AD; so ist $BAD = BDA$ (§. 50.). Da nun $BDA > DCA$ ist (§. 59.), so ist auch $BAD > DCA$. Um so mehr ist $BAC > DCA$, oder, $BAC > BCA$.

§. 67.

Zusatz.

Wenn also in einem Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so können auch die entgegenstehenten Seiten nicht ungleich seyn. Sind alle drey Winkel gleich groß, so ist das Dreyeck gleichseitig.

§. 68.

Lehrsatz.

In jedem Dreyecke DFE, stehet dem größern Winkel, FED, auch eine größere Seite gegenüber als dem kleinern FDE.

Fig. 16.

Be-

Beweis. Wenn nicht FD > FE wäre, so wäre entweder FD = FE oder FD < FE; Im ersten Falle wäre auch FED = FDE, (§. 50.), und im andern FED < FDE (§. 66.); welches beides der Voraussetzung widerstreitet.

§. 69.

Zusatz 1.

Im rechtwinklichten Dreyecke ist die Hypothenuse die größeste Seite (§. 61.), und im stumpfwinklichten diejenige, die dem stumpfen Winkel gegenüber stehet.

§. 70.

Zusatz 2.

Wenn aus einem Punkte, C, ein Perpendikel, CD, auf eine grade Linie AB gefället ist, so ist er die kürzeste Linie die von C auf AB möglich ist, also die Entfernung des Punktes C von der Linie AB. Imgleichen auch umgekehrt: wenn CD die kürzeste Linie von C auf AB ist, so stehet sie senkrecht. Sonst würde eine andre, etwa CF, senkrecht und also noch kürzer seyn. Fig. 17.

§. 71.

Lehrsatz.

Wenn zwey Triangel einen gleichen Winkel, D = A, eine gleiche anliegende und gegenüberstehende Seite haben, DE = AB, EF = BC, und wenn die gegenüberstehende größer ist, als die anliegende, Fig. 25.

EF > DE und BC = AB; so sind auch das dritte Paar der Seiten, die ganzen Triangel, und die übrigen Winkel, die den gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich groß.

Beweis. Wären AC und DF ungleich, und etwa AC > DF; so nimm (§. 34.) AG = DF. Alsdann ist A = D, AB = DE, AG = DF, folglich BG = EF (§. 57.). Weil nun auch BC = EF war, so ist BG = BC. Im Triangel ABC aber ist A > C (§. 66); ferner ist BGC > A (59); also BGC > C; mithin BC > BG (§. 68); welches den vorigen widerspricht.

Also sind DF nnd AC gleich groß; woraus denn das übrige folgt (§. 46.).

§. 72.

Zusatz

Wenn zwey rechtwinklichte Dreyecke eine gleiche Hypothenuse und einen gleichen Kathetus haben; so ist alles übrige auch gleich, wie §. 71.

§. 73.

Lehrsatz.

Aus einem Punkte, C, können auf eine grade Linie, AB, nicht mehr als zwey gleich große grade Linien; CD, CE, gezogen werden.

Fig. 26.

Beweis. Jede dritte, CF, die zwischen CD und CE fällt, ist kleiner. Denn im Dreyecke DCE ist o = p (§. 50.) weil CD = CE ist.

Nun

Nun ist CFE > o (§. 59.), also auch CFE > p; folglich CE > CF (§. 68.).

Jede andre aber, CG, die nicht zwischen CD und CE fällt ist größer. Denn die beiden gleichen Winkel o und p müssen spitze seyn (§. 61.). Weil also p spitz ist, so ist CEG stumpf (§. 23.) also CG > CE (§. 69.).

§. 74.

Erklärung.

Grade Linien sind parallel, wenn sie in einerley Ebene so liegen, daß sie nicht zusammenlaufen können, man mag sie an beiden Seiten verlängern, so weit man will. Um auszudrucken, daß Linien parallel seyn, werde das Zeichen ⧣ gebraucht

§. 75.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, G, eine grade Linie zu ziehen, die mit einer gegebenen, AB, parallel sey. Fig. 27.

Auflösung. In AB nimm willkührlich den Punkt H. Durch G und H ziehe die grade Linie EF. An EF lege in dem Punkte G den Winkel EGD = GHB (§. 47.) Verlängere DG nach C; so ist CD ⧣ AB.

Beweis. Wenn AB und CD, nach B und D verlängert, irgendwo in p zusammen liefen, so entstände das Dreyeck GpH, und es wäre EGD = GHB (§. 59); welches unmöglich ist, weil EGD = GHB.

Wenn

Wenn AB und CD aber an der andern Seite irgendwo in q zusammen kämen, so hätte man das Dreyeck HqG, und es wäre FHA > HGC (§. 59.). Dieses aber ist unmöglich. Denn, weil EGD und GHB gleich groß sind, und ferner (§. 25.) FHA = GHB und HGC = EGD ist; so ist FHA = HGC.

§. 76.

Erklärung.

Fig. 28. Wenn zwey grade Linien, AB, CD von einer dritten, EF, geschnitten werden; so heißen die Winkel, die zwischen den durchschnittenen Linien liegen, nämlich q, r, s, t, innere, und die übrigen o, p, v, w, äussere Winkel. Zwey innere Winkel, die nicht an einerley durchschnittenen und nicht an einerley Seite der schneidenden Linie liegen, heißen Wechselwinkel wie t und q, oder s und r.

§. 77.

Erklärung.

Die graden Linien AB und CD neigen sich gegeneinander, so fern die an einerley Seite liegenden innern Winkel r und t zusammen weniger als zwey rechte betragen, und sie neigen sich um so mehr gegeneinander, je kleiner diese Winkel sind.

§. 78.

Grundsatz.

Wenn zwey grade Linien zusammen laufen; so müssen um so mehr zwey andre zusammenlau-

fen

fen, die mit jenen von einerley Punkten ausgehen, und sich mehr gegeneinander neigen als jene.

§. 79.

Lehrsatz.

Wenn zwey grade Linien AB, CD sich gegeneinander neigen, so sind sie nicht parallel, sondern sie laufen gehörig verlängert, an der Seite zusammen, wo die innern Winkel liegen, die zusammen weniger als 2 R betragen. Fig. 29.

Beweis. Wenn AB und CD von EF in G und H geschnitten werden, und BHG + DGH < 2 R ist; so errichte über HG, an der Seite, wo die genannten Winkel liegen, ein Dreyeck HLG, worin LHG + LGH > BHG + DGH (§. 65. Zus.). Weil nun alsdann GL und HL zusammenlaufen; so müssen um so mehr GD und HB zusammenlaufen, da sie mit den erstern von einerley Punkten G und H ausgehen, und sich mehr gegeneinander neigen als jene (§. 78.) Also AB und CD laufen an der Seite zusammen, wo die innern Winkel BHG und DGH liegen, und sind folglich nicht parallel.

§. 80.

Erklärung.

Wenn zwey grade Linien von einer dritten geschnitten werden, so werden sie unter diejenigen Winkeln geschnitten, die an einerley Seite der schneidenden und der geschnittenen Linien liegen. AB

Fig. 28. AB und CD werden von EF unter den Winkeln q und t geschnitten.

§. 81.

Lehrsatz.

Zwey Parallelen AB und CD, werden von jeder graden linie EF unter gleichen Winkeln geschnitten, EGD = GHB.

Fig. 27.

Beweis. Wäre EGD > GHB; so wäre EGD + DGH = 2 R (§. 23.), also GHB + DGH < 2 R; also würden AB und CD rechter Hand zusammenlaufen (§. 79.).

Wäre EGD < GHB; so wäre auch AGH < AHF, (§. 27.). Da nun AHF + AHG = 2 R (§. 23); so wäre CGH + AHG < 2 R und AB und AD würden linker Hand zusammenlaufen (§. 79.).

Demnach muß EGD = GHB seyn, wenn AB ⧣ AD.

§. 82.

Lehrsatz.

Jeder Außenwinkel an einem Triangel ist so groß, als die beiden gegenüber stehenden innern zusammen, CBD = CAB + ACB.

Fig. 30.

Beweis Durch B ziehe (§. 75.) EF ⧣ AC, und verlängere CB nach G. Alsdann ist FBD = CAB (§. 81.) und EBG = ACB (§. 81.)

(§. 18.) folglich auch (§. 27.) CBF = ACD. Demnach ist FBD + CBF, das ist, GBD = CAB + ACB.

§. 83.

Lehrsatz.

Wenn das Dreyeck ACB gleichschenklicht ist, nähmlich CA = CB, und man verlängert einen von den gleichen Schenkeln, CA, durch die Spitze, nach D; so ist der äußere Winkel DCB doppelt so groß, als jeder von den gegenüber stehen den innern A oder B. Fig. 22.

Beweis. Es ist DCB = A + B (§. 82.). Da nun A = B (§. 50.); so ist DCB = A + A = B + B.

§. 84.

Lehrsatz.

In jedem Triangel, ACB, sind alle drey Winkel zusammen zweyen rechten gleich. Fig. 30.

Beweis. Verlängere irgend eine Seite AB, nach D. Alsdann ist CBD + CBA = 2R (§. 23.). Da nun CAB + ACB = CBD ist (§. 82.); so ist auch CAB + ACB + CBA = 2R.

§. 85.

Zusatz 1.

Wenn Triangel zwey Paar gleiche Winkel haben, so ist auch allemal das dritte Paar gleich. Wenn man ferner die Größe eines Winkels in einem Triangel von 2 R abzieht; so hat man die

Größe der beiden andern zusammen genommen; und wenn man die Größe zweyer Winkel von 2R abzieht, so hat man die Größe des dritten.

§. 86.

Zusatz 2.

Wenn der Winkel ACB, in der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks $= \frac{2}{3}R$ ist, so sind alle drey Winkel gleich groß (§. 85. §. 50.). Fig. 31.

§. 87.

Zusatz 3.

Wenn der Winkel, ACB, in der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks $= \frac{2}{3}R$ ist; so ist das Dreyeck gleichseitig (§. 86. §. 67.). Fig. 31.

§. 88.

Lehrsatz.

Wenn Triangel eine gleiche Seite haben, DF = AB, und zwey gleiche anliegende Winkel, D = A und E = B; so sind sie gleich; auch sind die übrigen Seiten gleich, diejenigen nämlich, die den gleichen Winkeln gegenüber stehen. Fig. 16.

Beweis. Da DE = AB, so lege D in A E in B (§. 13.). Alsdann fällt DF in AC und EF in BC (§. 17.), also auch F in C (§. 7.). Also passen die Dreyecke aufeinander und sind gleich groß (§. 11. 12.). Auch ist, aus demselben Grunde DF = AC und EF = BC.

§. 89.

Zusatz.

Wenn DE = AB, D = A, F = C ist, so ist alsdann auch E = B (§. 85.). Also überhaupt: Wenn Dreyecke eine gleiche Seite und zwey gleiche Winkel haben, so sind sie gleich groß; und die Seiten sind gleich, die den gleichen Winkeln gegenüber stehen.

II.

Von den Vierecken.

§. 90.

Lehrsatz.

Wenn grade Linien AB und CD von einer dritten EF, geschnitten werden, und die Wechselwinkel sind gleich, GHB = CGH; so sind AB und CD parallel. Fig. 27.

Beweis. Weil GHB = CGH, und EGD = CGH (§. 27): so ist EGD = GHB; folglich AB ⧣ CD (§. 75.).

§. 91.

Lehrsatz.

Auch sind AB und CD parallel, wenn die innern Winkel BHG und DGH zusammen zwey rechte betragen. Fig. 27.

Beweis. Weil BHG + DGH = 2 R und EGD + DGH = 2 R (§. 23.), mithin BHG + DGH = EGD + DGH; so ist EGD = BHG; folglich AB ⧣ CD (§. 75.)

§. 92.

Zusatz.

Alle grade Linien, die auf einerley graden Linien senkrecht stehen, sind unter sich parallel.

§. 93.

Lehrsatz.

Wenn grade Linien AB, CD parallel sind und von einer dritten EF geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel gleich, GHB = CGH.

Fig. 27.

Beweis. Weil AB ⧣ CD; so ist EGD = GHB (§. 81). Auch ist CGH = EGD (§. 27); folglich GHB = CGH.

§. 94.

Lehrsatz.

Wenn Parallelen AB, CD von einer graden Linie, EF, geschnitten werden, so machen die innern Winkel, BHG und DGH, zusammen zwey rechte aus.

Fig. 27.

Beweis. Weil AB ⧣ CD; so ist EGD = BHG (§. 81.). Auch ist EGD + DGH = 2R (§. 23); folglich auch BHG + DGH = 2R.

§. 95.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie, EF, eine von zwey Parallelen AB, CD schneidet;

Fig. 32.

det; so muß sie, genugsam verlängert, auch die andre treffen.

Beweis. In AB nimm willkührlich den Punkt H; ziehe GH. Alsdann ist DGH + BHG = 2R (§. 94); und, weil FGH < DGH; so ist FGH + BHG < 2R. Folglich müssen AB und EF zusammenlaufen, und zwar nach F und B hin (§. 79.).

§. 96.

Zusatz

Wenn grade Linien mit Einer dritten parallel sind; so sind sie auch unter sich parallel.

§. 97.

Lehrsatz.

Wenn zwey Winkel in einer Ebene, ABC und DEF, gleichförmig liegen, und beide Paar ihrer Schenkel parallel sind, AB ‡‡ DE, BC ‡‡ EF; so sind die Winkel gleich groß. Fig. 33.

Beweis. Verlängere (§. 95.) DE bis auf BC in den Punkt G. Weil nun EF ‡‡ BC und DG ‡‡ AB: so ist DEF = EGC und ABC = EGC (§. 81); folglich DEF = ABC.

§. 98.

Lehrsatz.

Imgleichen: wenn die Winkel DEF und ABC gleich groß, und das eine Paar der Schenkel, EF, BC parallel sind, Fig. 33.

 so

so sind auch die andern Schenkel DE und AB parallel.

Beweis. Weil EF ⧣ BC, so ist, wenn man DE wieder bis G verlängert, EGC = DEF (§. 81.). Nach der Voraussetzung ist auch ABC = DEF; folglich EGC = ABC; folglich DG ⧣ AB (§. 75.).

§. 99.

Erklärung.

Ein Viereck, worin jede Seite mit der gegenüberstehenden parallel ist, heiße ein Parallelogramm, ein solches, worin nur zwey gegenüberstehende Seiten parallel sind, ein Trapezium, und ein solches, worin gar keine Seite mit der andern parallel ist, ein Trapezoides.

§. 100.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu machen.

Auflösung. Nimm willkührlich einen Winkel, DAB. Durch D ziehe DE ⧣ AB und durch B die BF ⧣ AD (§. 75.). Wenn der Punkt, wo beide zusammen treffen, C heißt; so ist AC ein Parallelogramm.

Fig. 34.

Beweis. Daß BF mit DE zusammen laufe, erhellet aus §. 95., weil AB ⧣ DE; und daß AC ein Parallelogramm sey, aus §. 99.

§. 101.

Erklärung.

Eine Diagonallinie heißt eine grade Linie, die innerhalb der Fläche einer Figur aus einem Winkelpunkte in einen andern gehet.

§. 102.

Zusatz 1.

Ein Viereck wird durch die Diagonale in zwey Triangel getheilt; woraus erhellet, daß die Winkel in jedem Vierecke zusammen 4 R betragen.

§. 103.

Zusatz 2.

Wenn also Vierecke drey Paar gleiche Winkel haben, so ist allemal auch das vierte Paar gleich.

§. 104.

Zusatz 3.

Eben so kann man durch Diagonallinien ein Fünfeck in drey Triangel theilen, ein Sechseck in vier Triangel, u. s. f., so daß immer zwey Triangel weniger vorhanden sind, als die Figur Seiten hat. Man findet also für jede gradlinichte Figur, wie viel rechte Winkel ihre Winkel zusammen ausmachen, wenn man von der Anzahl der Seiten 2 abzieht und das übrige doppelt nimmt. In einem m eck sind alle Winkel zusammen $2.(m-2)$ R.

§. 105.

Lehrsatz.

Wenn AB und CD gleich große Parallelen sind, so sind die graden Linien, EF GH, die durch die Endpunkte derselben, A und C, B und D, gehen, auch parallel.

Fig. 35.

Beweis. Ziehe AD; so ist CDA=BAD (§. 93.); CD=BA, DA=AD; folglich Δ CAD=Δ ABD, und DAC=ADB (§. 57.); folglich EF ⵜ GH (§. 90.).

§. 106.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie AB zwey Punkte hat, E und G, die von einer andern Linie, CD, gleich weit entfernt sind; so sind beide Linien parallel.

Fig. 36.

Beweis. Aus E und G fälle die Perpendikel EF, GH, so sind diese die Entfernungen der Punkte E und G von der graden Linie CD (§. 70.). Da nun, nach der Voraussetzung, EF = GH, und, da überdem EF ⵜ GH (§. 92.); so ist AB ⵜ CD (§. 105.).

§. 107.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie LM zwey Punkte hat, E und N, die von einer andern graden Linie, CD, ungleich weit entfernt sind; so sind beide Linien nicht parallel.

Fig. 36.

Be-

Beweis. Fälle die Perpendikel EF, GH (§. 70.). Wenn nun $NH < EF$; so verlängere NH bis G, so, daß $GH = EF$. Durch E und G ziehe eine grade Linie AB; so ist AB $\#$ CD (§. 106.). Da nun LM die AB schneidet, so muß sie, genugsam verlängert, auch CD treffen (§. 95.). Also ist LM nicht $\#$ CD.

§. 108.

Zusatz 1.

LM und CG treffen an der Seite zusammen, wo die kleinere Entfernung liegt (§. 95.).

§. 109.

Zusatz 2.

Wenn AB $\#$ CG; so sind alle Punkte der AB von CG gleich weit entfernt; weil, wenn auch nur zweye ungleich weit entfernt wären, AB und CG nicht parallel seyn würden. Fig. 36.

§. 110.

Lehrsatz.

Wenn mehrere Punkte, A, E, G, B, von einer graden Linie CD gleich weit entfernt sind; so liegen sie in grader Linie. Fig. 36.

Beweis. Von A nach E ziehe die grade Linie AE, so ist, weil A und E von CD gleich weit entfernt sind, AE $\#$ CD (§. 106.). Wenn man nun AE verlängert; so muß sie auch durch G und B gehen. Wenn das nicht wäre, und AE etwa durch M ginge; so fälle den Perpendikel

GH, der die grade Linie AEM in N schneide. Alsdann ist NH < GH, also N von CD nicht so weit entfernt, als G, folglich auch nicht so weit als E oder A; welches unmöglich ist (§. 109.).

§. 111.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme, ABCD, sind die gegenüberstehenden Seiten gleich, AB = DC, DA = CB.

Fig. 34.

Beweis. Wenn AB und DC nicht gleich wären, und etwa AB > DC wäre; so nimm (§. 34.) AG = DC. Ziehe CG. Da nun AG = DC und AG ‡‡ DC, (§. 99.); so ist auch CG ‡‡ DA (§. 105.). Weil überdem CB ‡‡ DA (§. 99.); so ist CG ‡‡ CB (§. 96.); welches widersprechend ist (§. 74.). Also muß AB = DC seyn.

Eben so erhellet, daß DA = CB ist.

§. 112.

Zusatz.

Wenn in einem Parallelogramme zwey aneinander stoßende Seiten, AB und DA gleich groß sind; so sind alle Seiten gleich groß.

§. 113.

Lehrsatz.

Jedes Parallelogramm, CDBA, wird durch eine Diagonallinie, AD, in zwey gleiche Dreyecke getheilt.

Fig. 35.

Be-

Beweis. Es ist CD = AB (§. 111), AC = BD (§. 111.), AD = AD. Folglich △CAD = △ABD (§. 46.).

§. 114.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme CDBA sind die gegenüberstehenden Winkel gleich groß; C = B und A = D. Fig. 35.

Beweis. Ziehe die Diagonale AD. Weil alsdann die Triangel CAD und ABD lauter gleiche Seiten haben; so ist C = B (§. 46.).

Eben so erhellet, daß A = D.

§. 115.

Lehrsatz.

Wenn in einem Parallelograme ABCD Ein Winkel ein rechter ist, so sind sie alle rechte Winkel. Fig. 37.

Bew. Wenn A = R ist, so ist auch C = R (§. 114.). Folglich B + D = 2 R (§. 104.); und, weil B = D (§. 114.), so ist B = R und D = R.

§. 116.

Zusatz.

Wenn in einem Parallelogramme nicht alle Winkel rechte Winkel sind, so ist kein einziger ein rechter; oder, wenn ein Winkel schief ist, so sind sie alle schief; und zwar müssen zwene spitz und zwene stumpf seyn (§. 104. §. 114.).

§. 117.

Erklärung.

Ein Parallelogramm heiße gleichseitig, wenn alle seine Seiten gleich groß sind; widrigenfalls heiße es ungleichseitig. Sind alle Winkel eines Parallelogramms rechte Winkel, so werde es ein rechtwinklichtes, sonst aber ein schiefwinklichtes Parallelogramm genannt. Ein gleichseitiges, rechtwinklichtes Parallelogramm ist ein Quadrat, ein gleichseitiges, schiefwinklichtes ein Rhombus, ein ungleichseitiges rechtwinklichtes ein Rechteck (Oblongum), und ein ungleichseitiges, schiefwinklichtes ein Rhomboides.

§. 118.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu machen.

Auflösung. Nimm einen rechten Winkel A, und mache AB = AD. Vollende (§. 100.) das Parallelogramm; so ist dasselbe ein Quadrat.

Fig. 38.

Beweis. Weil A = R ist; so ist das Parallelogramm AC rechtwinklicht (§. 15.); und, weil AB = AD ist, so ist dasselbe auch gleichseitig (§. 112.). Folglich ist AC ein Quadrat (§. 117.).

§. 119.

Zusatz.

Wenn der Winkel A spitz oder stumpf wäre, so würde ein, zwar gleichseitiges (§. 112) aber

schief-

schiefwinklichtes Parallelogramm, also (§. 117.) ein Rhombus entstehen.

§. 120.

Aufgabe.

Ein Rechteck zu machen.

Auflösung. Nimm einen rechten Winkel A, und AB > AD. Vollende (§. 100.) das Parallelogramm; so ist dasselbe ein Rechteck. Fig. 39.

Beweis. Weil A = R ist; so ist das Parallelogramm AC rechtwinklicht (§. 115.); und weil AB > AD ist, so ist dasselbe ungleichseitig. Folglich ist es ein Rechteck (§. 117.).

§. 121.

Zusatz.

Wäre A spitz, oder stumpf, so würde AC nicht bloß ungleichseitig, sondern auch schiefwinklicht, mithin (§. 117.) ein Rhomboides werden.

§. 122.

Aufgabe.

Aus einem gegebnen Winkel A, und den gegebnen Schenkeln AB, AD, noch auf eine andre Art, als nach §. 100., ein Parallelogramm zu machen.

Auflösung. Aus D beschreibe einen Kreis mit dem Halbmesser AB; und aus B einen Kreis mit dem Halbmesser AD. Fig. 37. In den Durchschnittspunkt beider Kreise, C, ziehe die

die graden Linien DC, BC; so ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Ziehe die Diagonale DB. In den beiden, dadurch entstehenden Triangeln, ist DB = DB, ferner DC = AB, weil DC ein Halbmesser des Kreises ist, der mit dem Halbmesser AB verzeichnet wurde; (§. 32.); und endlich ist, aus demselben Grunde, BC = AD. Folglich (§. 46.) CDB = ABD, und mithin (§. 90.) DC ≠ AB. Imgleichen (§. 46.) CBD = ADB, folglich (§. 90.) BC ≠ AD.

Demnach ist ABCD ein Parallelogramm (§. 99.).

Zusatz.

Nach dieser Regel kann denn ein Quadrat, ein Rhombus, ein Rechteck und ein Rhomboides verzeichnet werden (§. 119—122.).

§. 123.

Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel, EFG, eine Seite EF in gleiche Theile, Ea, ab, bF, getheilt ist, und man zieht durch die Theilungspunkte grade Linien, die mit der andern Seite, EG, parallel sind, so wird die dritte Seite, FG, in eben so viel gleiche Theile getheilt.

Fig. 39.

Beweis. Ziehe be und af mit FG parallel 1) da die Theilungslinien mit EG, also (§. 96.) auch unter sich parallel sind, und da auch be ≠ FG; so ist ce ein Parallelogram: folglich

sich (§. 111) $cd = be$. 2) Weil $bc \# ad$; so ist $Fbc = bae$ (§. 81.); und, weil $be \# FG$; so ist $bFc = abe$. Da nun auch $bF = ab$; so ist $Fc = be$ (§. 88.).

Da also Fc und cb beide $= be$ sind; so ist $Fc = cd$; und eben so erhellet, daß $cd = dG$ ist.

§. 124.

Aufgabe.

Eine grade Linie FG, in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Aus F ziehe unter einen willkührlichen Winkel eine unbestimmte grade Linie, und trage (§. 54.) darauf so viel gleiche Theile von beliebiger Größe auf, als FG bekommen soll. Von dem Theilungspunkte, E, ziehe die grade Linie, EG, und durch die übrigen Theilungspunkte grade Linien mit EG parallel. Dadurch wird FG in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile getheilt. Fig. 39.

Beweis. Erhellet aus (§ 123.).

§. 125.

Lehrsatz.

Zwey Diagonalen eines Parallelogrammes halbiren sich. Fig. 40.

Beweis. In dem Parallelogramme ABCD ziehe die Diagonalen AC und DB. Ihr Durchschnittspunkt heiße E. Alsdann hat man die Triangel AEB und DEC. Hierin ist $AB = DC$ (§. 111); $EAB = ECD$ (§. 93.), $EBA = EDC$. (§. 93)

(§. 93); folglich (§. 88) AE = EC, und DE = EB.

§. 126.

Lehrsatz.

Jede grade Linie GH, die aus einer Seite eines Parallelogrames in die entgegengesetzte, durch den Mittelpunkt, F, einer Diagonale gehet, wird von dieser Diagonale halbirt.

Fig. 41.

Auch sind die dadurch entstehenden entgegengesetzten Triangel, HFB, DFG, gleich groß.

Beweis. In den Triangeln HFB und DFG ist, der Voraussetzung nach, DF = FB. Ferner ist GFD = HFB (§. 27), und GDF = HBF (§. 93); folglich (§. 88.) △ HFB = △ DFG, und HF = FG.

§. 127.

Lehrsatz.

Ein Parrallelogramen wird von jeder graden Linie, die durch den Mittelpunkt der Diagonale gehet halbirt.

Fig. 41.

Beweis. Wenn F der Mittelpunct der Diagonale DB ist, so ziehe durch F willkührlich die grade Linie GH. Alsdann ist △ ADB = △ DCB (§. 113.), und △ HFB = △ DFG (§. 126.). Folglich △ ADB — △ HFB = △ DCB — △ DFG; das ist, ADFH = FGCB.

Folg-

Folglich ferner ADFH + △DFG = FGCB + △HFB; das ist, ADGH = HGCB.

§. 128.

Erklärung.

Die Höhe eines Triangels ist die Entfernung der Grundlinie von der Spitze; und die Höhe eines Parallelogrammes ist die Entfernung der Grundlinie von der ihr gegenüber stehenden Seite.

§. 129.

Zusatz 1.

Die Höhe bezieht sich also allemal auf die Grundlinie, und kann folglich nicht eher bestimmt werden, bis festgesetzt ist, welche Seite als Grundlinie angenommen werden soll.

§. 130.

Zusatz 2.

Die Höhe eines Triangels ist der Perpendikel, der aus der Spitze auf die Grundlinie fällt (§. 70.), entweder innerhalb des Triangel, oder ausserhalb desselben auf die verlängerte Grundlinie. Die Höhe eines Parallelogrammes ist der Perpendikel, der auf die Grundlinie aus der entgegenstehenden Seite (aus welchem Punkte derselben man will §. 109.) herabfällt, entweder innerhalb des Parallelogrammes, oder ausserhalb desselben auf die verlängerte Grundlinie.

§. 131.

Erklärung.

Ein Triangel liegt zwischen zwey Parallelen, wenn seine Grundlinie in der einen und seine Spitze in der andern liegt. Eben so liegt ein Parallelogramm zwischen zwey Parallelen, wenn seine Grundlinie in der einen und die der Grundlinie entgegenstehende Seite in der andern von diesen Parallelen liegt.

§. 132.

Lehrsatz.

Wenn ein Triangel EFG und ein Parallelogramm HOKL zwischen einerley Parallelen, AB und CD, liegen, so sind sie gleich hoch.

Fig. 42.

Beweis. Aus der Spitze des Dreyecks, F, fälle den Perpendikel FM, so ist derselbe die Höhe dieses Dreyecks (§. 130.). Ferner auf die Grundlinie, HO, des Parallelogrammes lasse den Perpendikel LN herab, so ist derselbe die Höhe dieses Parallelogrammes (§. 130.). Weil nun $AB \# CD$; so ist $FM = LN$ (§. 109. §. 70.). Also Triangel und Parallelogramm sind gleich hoch.

§. 133.

Zusatz.

Eben so erhellet, daß auch zwey Triangel, oder zwey Parallelogramme gleich hoch sind, wenn sie zwischen einerley Parallelen liegen.

§. 134.

Lehrsatz.

Wenn Parallelogramme, ABCD und ABEF, auf einerley Grundlinie, AB, stehen, und gleich hoch sind; so liegen die der Grundlinie entgegengesetzten Seiten, DC und FE in Einer graden Linie. Fig. 43.

Beweis. Weil die Parallelogramme gleich hoch sind, so sind DC und FE gleich weit von AB entfernt (§. 128.). Weil also (§. 109.) die Punkte D, C, F, E von AB gleich weit entfernt sind; so liegen sie in grader Linie (§. 110.). Wenn man also CF zieht, so ist DCFE, oder DE, eine grade Linie.

§. 135.

Lehrsatz.

Parallelogramme, ABCD und ABEF, auf einerley Grundlinie, AB, in gleicher Höhe, sind gleich groß. Fig. 43.

Beweis. Ziehe CF, so ist DCFE eine grade Linie (§. 134.). Da nun DC = AB, und FE = AB ist (§. 111.); so ist DC = FE. Folglich DC + CF = FE + CF, oder, DF = CE.

Weil also DF = CE, nun überdem (§. 111.) FA = EB, und DA = BC; so ist △ADF = △BCE (§. 46.).

Demnach ist △ADF − △GCF = △BCE − △GCF, oder, AGCD = GBEL.

Folglich ist auch AGCD + △ AGB = GBEF + △ AGB, das ist, ABCD = ABEF.

§. 136.

Zusatz.

Auch sind Parallelogramme, ABCD und HIKL, gleich groß, wenn sie gleiche Grundlinien, AB = HI, und gleiche Höhe haben. Denn, wenn man H in A und I in B legt (§. 13.); so stehen beide auf Einer Grundlinie (§. 6.) und haben einerley Höhe.

Fig. 43.

§. 137.

Lehrsatz.

Dreyecke, ACB, DFE, auf gleicher Grundlinie, AB = DE, in gleicher Höhe, sind gleich groß.

Fig. 44.

Beweis. Aus den Winkeln A und den anliegenden Schenkeln AB, AC mache (§. 12[illegible].) ein Parallelogramm, AG. Eben so mache aus dem Winkel D, und den Schenkeln DE, DF, ein Parallelogramm, DH. Alsdann sind die Perpendikel aus den Spitzen der Dreyecke, C und F, auf die Grundlinien zugleich die Höhen der gegebnen Dreyecke und der Parallelogramme AG und DH (§. 130.). Da nun diese Höhen, und überdem die Grundlinien AB und DE gleich sind, so ist AG = DH (§. 136.).

Nun ist △ ACB = $\frac{1}{2}$ AG; (§. 113.); und △ DFE = $\frac{1}{2}$ DH; folglich △ ACB = △ DFE.

§. 138.

§. 138.

Zusatz.

Wenn ein Triangel und ein Parallelogramm gleiche Grundlinie und Höhe haben, so ist der Triangel halb so groß als das Parallelogramm.

§. 139.

Lehrsatz.

Gleiche Seiten, AB, EF, haben gleiche Quadrate. Fig. 45.

Beweis. Quadrate sind Parallelogramme (§. 117.), und, wenn AB, EF die Grundlinien sind, so sind DA, HE die Höhen (§. 130.). Ist nun AF = EF, so ist auch DA = HE (§. 117.), folglich ABCD = EFGH (§. 136.).

§. 140.

Lehrsatz.

Ungleiche Seiten haben ungleiche Quadrate, die größere Seite IK hat ein größeres Quadrat, als die kleinere EF. Fig. 45.

Bew. Weil IK > EF, also auch (§. 117.) IM > EH; so nimm IP = EF, IO = EH, und vollende (§. 118.) das Quadrat IPNO. Alsdann ist IPNO = EFGH (§. 139.). Da nun IKLM > IPNO ist; so ist auch IKLM > EFGH.

§. 141.

Zusatz 1.

Gleiche Quadrate haben gleiche Seiten; und ungleiche Quadrate haben ungleiche Seiten. Das

 größere

größere Quadrat hat eine größere Seite als das kleinere (§. 139. §. 140.).

§. 142.

Aufgabe.

Gegebene gleich hohe Triangel, ACB, DFE, GIH zusammen zu addiren, so daß die Summe auch ein Triangel wird.

Auflösung. Mache LM so groß als die Fig. 46. Grundlinie AB, DE, GH der gegebenen Dreyecke zusammengenommen. Ueber LM errichte in einem beliebigen Punkte den Perpendikel NO = der Höhe der gegebenen Dreyecke. Ziehe LN, MN. Alsdann ist LNM der verlangte Triangel.

Beweis. Weil LM = AB + DE + GH ist, so mache LP = AB, PQ = DE, QM = GH. Ziehe NP, NQ. Alsdann ist der Perpendikel NO die Höhe der Dreyecke LNP, PNQ, QNM (§. 130). Diese Dreyecke haben also mit den gegebenen gleiche Grundlinien und Höhen; und sind ihnen also gleich (§. 137.) Nun ist LNM = LNP + PNQ + QNM; folglich auch LNM = ACB + DEF + GIH.

§. 142.

Aufgabe.

Ein Dreyeck, ACB, von einem größern, Fig. 46. eben so hohen Dreyecke, LNM, abzuziehen, so daß der Rest auch ein Dreyeck wird.

Auf-

Auflösung. Nimm LP = der Grundlinie, AB, des gegebenen Dreyecks. Ziehe NP. Alsdann ist △ PNM der verlangte Rest.

Beweis. Weil LNP mit LNM einerley Höhe hat (§. 130), und ACB, der Voraussetzung nach, ebenfalls; so sind auch LNP und ACB gleich hoch; und weil überdem ihre Grundlinien LP, AB gleich sind, so ist LNP = ACB (§. 137.)

Nun ist LNM — LNP = PNM; folglich ist auch LNM — ACB = BNM.

§. 144.

Lehrsatz.

Bey jedem rechtwinklichten Triangel ACB ist das Quadrat der Hypothenuse CB
Fig. 47. so groß, als die Quadrate der beiden Katheten AB und AC zusammen genommen.

Beweis. Vorläufig ist aus §. 24. klar, daß AC und AG in grader Linie liegen. Also ist auch GC ‡‡ FB (§. 99.). Eben so ist IB eine grade Linie und mit HC parallel.

Ziehe nun aus A (§. 75.) die grade Linie AL ‡‡ BD, mit der also auch CE parallel ist (§. 96. §. 99.). Dadurch wird das Hypothenusenquadrat in zwey Parrallelogramme BL und KE getheilt (§. 99); wovon das erstere dem Quadrate GB und das andere dem Quadrate IC gleich ist.

I. Ziehe die Hülfslinien AD, CF; so entstehen die Triangel BAD und FCB, die einander gleich

und die Hälften vom Parallelogramme und Quadrate sind.

1) Es ist ABD = FBC, weil jeder aus einem rechten Winkel (§. 117.) und dem Winkel ABC bestehet. Ferner ist AB = FB (§. 117.), BD = BC (§. 117.), BD = BC (§. 117.). Folglich △ BAD = △ FBC (§. 57.).

2) △ BAD und Parallelogramm BL stehen auf einerley Grundlinie, BD, und sind gleich hoch, weil sie zwischen einerley Parallelen BD und AL, liegen (§. 132.). Folglich ist △ BAD = $\frac{1}{2}$ GB; (§. 138.). Eben so ist △ FBC = $\frac{1}{2}$ GB; indem beide auf der Grundlinie FB stehen und zwischen einerley Parallelen FB und GC, liegen.

3) Weil also (Nr. 1) △ BAD = △ FCB, und (Nr. 2), △ BAD = $\frac{1}{2}$ BL und △ FBC = $\frac{1}{2}$ GB; so ist auch BL = GB.

II. Auf die nämliche Art erhellet, daß das Parallelogramm KE = dem Quadrat IC ist; wenn man nur, wie vorher die Hülfslinien AE, und BH ziehet.

Weil also (I.) BL = GB, und (II.) KE = IC; so ist BL + KE = GB + IC; das ist, CBDE = GB + IC.

Zusatz.

Man bezeichne das Quadrat einer Seite, AB, durch AB^2. Alsdann ist auch $CB^2 - AB^2 = AC^2$; und $CB^2 - AC^2 = AB^2$.

§. 145.

§. 145.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke, ACB, das Quadrat der einen Seite, CB, sogroß ist als die Quadrate der beiden andern zusammen; so ist das Dreyeck rechtwinklicht, und der Winkel A, welcher der ersten Seite, BC, gegenüber stehet, ist der rechte Winkel. Fig. 47.

Beweis. Mache (§. 55.) einen rechten Winkel, N, nimm $NM = AB$, $NO = AC$; und ziehe OM. Alsdann ist $OM^2 = NM^2 + NO^2$ (§. 144; folglich auch $OM^2 = AB^2 + AC^2$ (§. 139). Da nun, der Voraussetzung nach, auch $CB^2 = AB^2 + AC^2$ ist; so ist $OM^2 = CB^2$, mithin (§. 141) $OM = CB$.

Da demnach die Dreyecke ACB und NOM gleiche Seiten haben, so ist (§. 46.) $A = N = R$.

§. 146.

Aufgabe.

Gegebene Quadrate, AB^2, CD^2, EF^2, zusammen zu addiren, so daß die Summe auch ein Quadrat wird.

Auflösung und Beweis. Nimm einen rechten Winkel, G; mache $GI = AB$, $GH = CD$; ziehe IH. Alsdann ist $IH^2 = AB^2 + CD^2$ (§. 144. §. 139.). In I errichte die senkrechte $IL = EF$, und ziehe LH; so ist $LH^2 = IH^2 + IL^2 = IH^2 + EF^2$ (§. 139.) Also ist $LH^2 = AB^2 + CD^2 + EF^2$. Fig. 48.

§. 147.

Aufgabe.

Von einem gegebenen Quadrate, AB^2. ein andres CD^2, abzuziehen, so, daß der Rest auch ein Quadrat wird.

Aufl. Nimm einen rechten Winkel M, mache
Fig. 48. MO = CD. Aus O schlage einen Cirkel mit dem Halbmesser AB. Wenn nun der Punkt wo der andre Schenkel des Winkels M geschnitten wird, N heißt, so ist MN^2 der verlangte Rest.

Beweis. Es ist $ON^2 - MO^2 = MN^2$ (§. 144.). Weil nun AB = ON (§. 32.) und CD = MO ist; so ist (§. 139.) $AB^2 - CD^2 = MN^2$.

III.

Vom Kreise.

§. 148.

Lehrsatz.

Fig. 49. Eine grade Linie kann nur in zwey Punkten, nicht in mehrern, mit der Peripherie eines Kreises zusammenlaufen.

Beweis. Man setze, eine grade Linie ABD habe drey Punkte, A, B, D mit der Peripherie eines Kreises gemein; so könnte man die Halbmesser CA, CB, CD ziehen. Diese wären gleich groß (§. 32.); und das ist unmöglich (§. 73.).

§. 149.

Lehrsatz.

Fig. 49. Wenn eine grade Linie, AB, in zwey Punkten A und B, mit der Peripherie eines

nes Kreises zusammenläuft, so liegt jeder, zwischen A und B befindliche Punkt derselben in der Fläche des Kreises.

Beweis. Wenn man die Halbmesser CA, CB zieht; so sind dieselben gleich groß. Jede andre grade Linie aber von C auf AB ist kürzer. (§. 73). Folglich sind A und B von C weiter entfernt, als jeder andre Punkt in AB. Da nun die erstern in der Peripherie liegen, so liegt jeder andere innerhalb der Fläche des Kreises.

§. 150.

Zusatz.

Jede Sehne eines Kreises liegt ganz innerhalb der Fläche desselben, ihre Endpunkte ausgenommen, die in der Peripherie liegen (§. 31.).

§. 151.

Lehrsatz.

Jeder Diameter theilt die Peripherie des Kreises in zwey gleiche Bogen, und die Fläche in zwey gleiche Abschnitte, oder, in zwey Halbkreise ABD und ABF. Fig. 50.

Beweis. Aus §. 31. und §. 11. erhellet sehr leicht, daß ABD und ABF, imgleichen auch die Bogen ADB und AFB, aufeinander passen und also (§. 12.) einander gleich sind.

§. 152.

Lehrsatz.

Jede gerade Linie, AB, welche die Peripherie eines Kreises halbirt, geht Fig. 50.

durch

durch den Mittelpunkt und halbirt also auch den Kreis.

Beweis. Wenn AB nicht durch den Mittelpunkt, C, ginge, sondern etwa AGB eine grade Linie wäre; so könnte man von A einen Durchmesser ziehen. Dieser müßte auch in B treffen (§. 151.), gegen §. 6.

§. 153.

Lehrsatz.

Fig. 49. Ein Perpendikel, FG, in dem Mittelpunkte, F, einer Sehne, AB, gehet durch den Mittelpunkt des Kreises, C.

Beweis. Ziehe die Halbmesser CA, CB; so ist (§. 32.) das Dreyeck ACB gleichschenklicht; und F ist der Mittelpunkt der Grundlinie (§. 48.). Also gehet der Perpendikel FG durch C (§. 51.).

§. 154.

Aufgabe.

Von einem Kreise ist ein Bogen, AB, gegeben, man soll den Mittelpunkt desselben finden.

Fig. 51. Auflösung. In AB ziehe willkührlich zwey Sehnen, DE und EF, halbire sie (§. 54) in G und I, und errichte in G und I Perpendikel (§. 55). Der Punkt, C, worin beide Perpendikel zusammentreffen, ist der gesuchte Mittelpunkt.

Beweis. Beide Perpendikel müssen durch den Mittelpunkt des Kreises gehen (§. 153.), und, weil beide nur einen einzigen Punkt gemein haben können (§. 7), so ist C der gedachte Mittelpunkt.

§. 155.

§. 155.

Zusatz 1.

Wenn der ganze Kreis gegeben ist, und der Mittelpunkt gesucht wird, so findet man denselben eben so.

§. 156.

Zusatz 2.

Wenn ein Bogen AB gegeben ist und man soll den Kreis vollenden, so sucht man den Mittelpunkt C. Alsdann hat man auch den Halbmesser, CA, und kann also (§. 33.) den ganzen Kreis verzeichnen.

§. 157.

Aufgabe.

Durch jede drey Punkte A, B, C, die nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu legen.

Auflösung. Ziehe AB, BD; halbire sie (§. 54.) in E und G; errichte (§. 55.) in E und G Perpendikel EF, GH, und verlängere dieselben, bis sie sich in einem Punkte, C, schneiden; so ist C der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, also CA der Halbmesser und man kann deo Kreis verzeichnen (§. 33.). Fig. 52.

Beweis. Wenn vorausgesetzt wird, daß es einen Kreis gebe, der durch A, B, D läuft; so sind AB, BD Sehnen desselben und die Richtigkeit der Auflösung erhellet aus §. 154.

Wann das aber nicht vorausgesetzt wird, so muß bewiesen werden, daß die erwähnten Perpendi-

pendikel jedesmal, in irgend einem Punkte, C, zusammentreffen, und daß C von A, B, und D gleich weit entfernt ist.

1) Weil A, B, D nicht in grader Linie liegen, AB, BD also einen Winkel formiren; so fällt die grade Linie EG mit EBG nicht zusammen. Nun ist HGB + FEB = 2R (§. 18), folglich HGE + FEG < 2R, folglich müssen GH und EF in irgend einem Punkte, C, zusammentreffen (§. 79).

2) Ziehe CA, CB, CD. Weil CE = CE, EA = EB, CEA = CEB (§. 18) ist; so ist CA = CB (§. 57.). Eben so erhellet, daß CB = CD ist.

§. 158.

Erklärung.

Kreise berühren sich, wenn ihre Peripherien nur in einem einzigen Punkte zusammenlaufen. Eine grade Linie berührt den Kreis, wenn sie nur in einem einzigen Punkte mit der Peripherie desselben zusammenläuft, und übrigens ganz außer demselben liegt, man mag sie an beiden Seiten verlängern, so weit man will. Eine grade Linie, die den Kreis berührt, heiße eine Tangente des Kreises.

§. 159.

Lehrsatz.

Fig. 53. Wenn ein Kreis den andern von aussen berührt, so gehet die grade Linie von

einem

einem Mittelpunkte zum andern, AB, auch durch den Berührungspunkt, C.

Beweis. Wenn das nicht wäre, sondern etwa ADEB eine grade Linie wäre; so ziehe AC und CB. Alsdann ist (§. 32.) AC = AD, CB = EB; folglich AC + CB = EB, folglich AC + CB = AD + EB, folglich AC + CB < AD + DE + EB; gegen §. 8.

§. 160.

Lehrsatz.

Wenn ein Kreis einen andern von innen berührt, so trift die grade Linie, die durch beide Mittelpunkte, A und B, gehet, auch den Berührungspunkt, C. Fig. 54.

Beweis. Wenn AB nicht in C ginge, so gehe sie sonst irgendwo durch D in E. Alsdann ist ABDE ein Halbmesser des äussern Kreises. Ziehe BC; so ist AB = AB, BD = BC (§. 32.), folglich ABDE > ABC, folglich um so mehr ABDE > als die grade Linie AC; folglich wären die Halbmesser ABDE und AC ungleich, gegen §. 32.

§. 161.

Lehrsatz.

Jede Tangente eines Kreises, GH, ist auf dem Halbmesser senkrecht, der in dem Berührungspunkt, F, gehet. Fig. 54.

Beweis. Jede grade Linie, AM, die man außer AF, auf GH ziehen kann, ist > AF; weil

weil jeder Punkt von GH, F ausgenommen, außerhalb des Kreises liegt (§. 158.). Folglich ist AF senkrecht auf GH (§. 70.).

§. 162.

Lehrsatz.

Jede grade Linie, GH, die auf einem Halbmesser des Kreises, AF, im Endpunkte, F, senkrecht stehet, ist eine Tangente.

Fig. 54.

Beweis. Jeder Punkt M, den man außer F in GH nehmen mag, ist weiter von A entfernt als F und liegt also ausserhalb dem Kreise, weil, wenn man AM ziehet, allemal AM > AF ist (§. 70.). Folglich ist GH eine Tangente (§. 158).

§. 163.

Aufgabe.

Durch einen, in der Peripherie des Kreises gegebenen Punkt, F, eine Tangente zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Ziehe den Halbmesser AF, und (§. 55.) durch F die GH senkrecht; so ist GH die verlangte Tangente (§. 162.).

Fig. 54.

§. 164.

Lehrsatz.

Wenn zwey Tangenten eines Kreises einander durchschneiden, so sind die Abschnitte zwischen dem Durchschnittspunkte und den Berührungspunkte AD und BD, gleich groß.

Fig. 55.

Be-

Beweis. Ziehe DC, imgleichen die Halbmesser CA, CB. Weil nun CAD = CBD; indem beide rechte Winkel sind (§. 161) und ferner CA = CB (§. 32.), DC = DC; so ist (§. 72.). AD = BD.

§. 165.

Zusatz.

Auch ist DCA = DCB (§. 72.). Also die grade Linie aus dem Durchschnittspunkte der Tangenten in den Mittelpunkt des Kreises halbirt den Winkel, DAB, den die Tangenten formiren, und den Winkel ACB, den die Halbmesser einschließen, die in die Berührungspunkte gehen.

§. 166.

Lehrsatz.

Es giebt keine, durch den Berührungspunkt, F, gehende grade Linie, die zwischen die Tangenten FG, und den Kreis fiele. Fig. 54.

Beweis. Man setze, es gebe eine solche grade Linie FP. Weil nun FG senkrecht auf AF ist (§. 161), so ist FB nicht senkrecht auf AF (§. 25.). Also sey AO senkrecht auf FP. Alsdann ist AO < AF (§. 70.); und, weil AF = AN (§. 32.), so ist auch AO < AN; welches sich widerspricht (§. 32.).

§. 167.

Zusatz 2.

Der Winkel NFG, den der Kreisbogen mit der Tangente formirt, ist kleiner als jeder gradlinichte.

§. 168.

Lehrsatz.

Fig. 56. Kreise die gleiche Halbmesser haben sind gleich groß.

Beweis. Wenn man ihre Mittelpunkte, B und A, ineinander legt, so fallen auch die Peripherien ineinander. Denn, wenn irgend ein Punkt von n nicht in m fiele, sondern etwa in D so wäre AD ein Halbmesser von n; und die Kreise hätten also ungleiche Halbmesser. Also passen sie aufeinander (§. 11.).

§. 169.

Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, die Winkel am Mittelpunkte, EAF und GBH, gleich groß sind, so sind auch die Ausschnitte EFA und GHB, imgleichen die Bogen, EF und GH gleich groß.

Fig. 56.

Beweis. GBH passet auf EAF (§. 17.). Ferner fallen alsdann E und G, imgleichen H und F ineinander, weil die Halbmesser gleich sind (§. 13.). Auch muß der Bogen GH übrigens ganz in dem Bogen EF fallen, welches, wie

§. 168.

§. 168. erhellet. Folglich sind diese Bogen sowol, als auch die Sektoren GHB und EFA gleich groß (§. 12.).

§. 170.

Lehrsatz.

Wären die erwähnten Winkel ungleich, so sind auch die Bogen und Sektoren ungleich.

Beweis. Wenn etwa EAF > GBH ist; so nimm (§. 47.) EAK = GBH: so ist (§. 169.) GH = EK < EF, und GHB = EKA < EFA.

§. 171.

Zusatz.

In einerley Kreise, oder in gleichen Kreisen, haben gleiche Bogen und gleiche Sektoren auch gleiche Winkel am Mittelpunkte.

§. 172.

Erklärung.

Der vierte Theil von der Peripherie des Kreises heiße ein Quadrant.

§. 173.

Zusatz 1.

Zwey senkrechte Diameter, AB, DE, theilen die Peripherie in vier Quadranten und den Kreis in vier gleich große Sektoren (§. 171. §. 22.). Fig. 57.

§. 174.

Zusatz 2.

Wenn man aus der Spitze eines Winkels mit irgend einem Halbmesser einen Bogen von einem Schenkel des Winkels bis zum andern verzeichnet, so fasset der Winkel diesen Bogen. Jeder rechte Winkel, ACE, fasset also einen Quadranten, AE, wie erhellet, wenn man den Kreis vollendet und die Schenkel des Winkels bis B und D verlängert.

Fig. 57.

§. 175.

Zusatz 3.

Ein spitziger Winkel fasset weniger, und ein stumpfer mehr, als einen Quadranten.

§. 176.

Lehrsatz.

Wenn zwey Diameter, AB, DE, den Kreis in gleiche Bogen, oder Quadranten, theilen; so sind sie auf einander senkrecht.

Fig. 57.

Beweis. Es sey widrigenfalls FG auf AB senkrecht. Dann wäre AD = DB, laut der Voraussetzung, und AF = FB (§. 173.). Da nun AD < AF ist, so wäre auch DB < FB; welches sich widerspricht.

§. 177.

Zusatz.

Wenn ein Winkel, ACE, einen Quadranten fasset, so ist er ein rechter; fasset er weniger als

als einen Quadranten, wie ACG, so ist er spitz; und fasset er mehr, als z. B. ACE, so ist er stumpf.

§. 178.

Lehrsatz.

In einerley Kreise, oder in gleichen Kreisen, haben gleiche Bogen, CGD, EHF, auch gleiche Sehnen, CD, EF. Fig. 58.

Auch umgekehrt, wenn die Sehnen gleich sind, so sind die zugehörigen Bogen gleich.

Beweis. 1. Weil CGD = EHF ist, so ist CAD = EBF (§. 171.). Ferner ist AC = BE, AD = BF. Folglich CD = EF (§. 57.).

Beweis. 2. Wenn CD = EF ist; so ist (§. 46.) △ CAD = △ EBF, und die Winkel CAD, EBF, folglich (§. 169.) auch die Bogen CGD, EHF sind gleich groß.

§. 179.

Lehrsatz.

Wenn in einerley Kreise, oder in gleichen Kreisen, die Sehnen CD und EF gleich groß sind, so sind auch die Segmente CDG und EFH gleich groß. Fig. 58.

Beweis. Wenn CD = EF ist, so ist (§. 178. Beweis 2.) CAD = EBF, folglich (§. 169.) Sekt. CADG = Sekt. EBFH. Ferner ist (§. 178. Beweis 2.) △ CAD = △ EBF.

 Folglich

Folglich ist Sekt. CADG — △CAD = Sekt. EBFH — △EFB; das ist CDG = EFH.

§. 180.

Lehrsatz.

Ein Halbmesser, CH, der den Winkel am Mittelpunkte, ECF, halbirt, ist auf der Sehne, EF, senkrecht, und halbirt den Bogen EHF, den Sektor ECFH, die Sehne EF, und das Segment EFH.

Fig. 55.

Wenn ECH = HCF ist, so ist (§. 169.). EH = HF und Sekt. ECH = Sekt. HCF;

Weil ferner CE = CF ist; so ist (§. 52.) CH senkrecht auf EF, und halbirt EF.

Weil endlich auch △ECG = △GCF (§. 49.) und überdem Sekt. ECH = Sekt. HCF ist; so ist Sekt. ECH — △ECG = Sekt. HCF — △GCF, das ist EHG = HFG.

§. 181.

Zusatz.

Aus §. 49. erhellet: Wenn der Halbmesser CH die Sehne halbirt, so halbirt er auch den Winkel am Mittelpunkte, und hat folglich auch alle übrigen §. 180. erwähnten Eigenschaften.

Eben das gilt, wenn der Halbmesser auf der Sehne senkrecht ist, wie sich aus §. 64 ergiebt.

Auch muß die grade Linie aus dem Durchschnittspunkte zweyer Tangenten in den Mittelpunkt

des Kreises den Bogen zwischen den Berührungs-punkten halbiren (§. 165.).

§. 182.

Erklärung.

Wenn zwey Sehnen eines Kreises einen Winkel einschließen, so heiße derselbe ein Peripheriewinkel. Die Spitze eines solchen Winkels liegt also in der Peripherie und er stehet auf dem Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

§. 183.

Lehrsatz.

Wenn ein Centriwinkel, ACB, und ein Peripheriewinkel, ADB, auf einerley Bogen, AB, stehen; so ist der Centriwinkel doppelt so groß, als der Peripheriewinkel. Fig. 59. 60. 61.

Beweis. Es sind drey Fälle möglich: Entweder fällt ein Schenkel des Peripheriewinkels mit einem Schenkel des Centriwinkels zusammen, oder er durchschneidet ihn, oder es ist keins von beiden.

1) Im ersten Falle, welchen Fig. 59. vorstellt, wo AD mit AC zusammenfällt, erhellet aus §. 83. daß ACB = 2 ADB ist, indem BCD gleichschenklicht ist (§. 32.).

2) Im zweyten Falle (Fig. 60.) ziehe den Durchmesser DF. Alsdann ist (Satz 1.) FCB = 2 FDB = (2 FDA + 2 ADB). Ferner ist

 (Satz

(Satz 1.) FCA = 2 FDA. Folglich ist FCB — FCA = (2 FDA + 2 ADB) — 2 FDA; das ist ACB = 2 ADB.

3) Im dritten Falle (Fig. 61.) ziehe wieder den Durchmesser DF; so ist (S. 1.) ACF = 2 ADF, und FCB = 2 FDB. Folglich ist ACF + FCB = 2 ADF + 2 FDB, oder, ACB = 2 ADB.

§. 184.

Zusatz 1.

Eben das gilt, wenn ein Centri- und Peripheriewinkel, in einerley Kreise, oder in gleichen Kreisen, auf gleichen Bogen stehen.

§. 185.

Zusatz 2.

Alle Peripheriewinkel auf gleichen Bogen, in einerley oder gleichen Kreisen, sind gleich groß.

§. 186.

Zusatz 3.

Ein Peripheriewinkel ist so groß als ein Centriwinkel, der auf einem halb so großen Bogen stehet, als der erstere (§. 171.).

§. 187.

Zusatz 4.

Ein Peripheriewinkel, der auf der halben Peripherie stehet, ist allemal ein rechter Winkel. (§. 186. §. 177.).

§. 188.

Aufgabe.

Durch einen, außerhalb des Kreises, gegebenen Punkt, D, eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Ziehe CD, habire sie in F (§. 54) und verzeichne aus F einen Kreis mit dem Halbmesser FC = FD. Wenn die Punkte, wo dieser Kreis den gegebenen schneidet, und A und B heißen; so ist DA und DB eine Tangente. Fig. 62.

Beweis. In dem gegebenen Kreise ziehe die Halbmesser CB, CA. Da nun der Bogen CAD die halbe Peripherie des Hülfskreises ist (§. 151.), so ist (§. 187.) DBC = R; folglich DB eine Tangente des gegebenen Kreises (§. 162.)

Eben so erhellet, daß DA eine Tangente ist.

§. 189.

Anmerkung.

Wenn ein Winkel ACD in gleiche Theile getheilt ist, so wird auch sein Bogen in eben so viel gleiche Theile getheilt, wenn man die Theilungslinien bis an den Bogen verlängert (§. 169.). Ist umgekehrt der Bogen in gleiche Theile getheilt und man zieht aus den Theilungspunkten grade Linien in die Spitze des Winkels, so wird der Winkel in eben so viel gleiche Theile getheilt (§. 171). Fig. 63.

§. 190.

Anmerkung.

Wenn ein rechter Winkel ACB, und der Quadrant, AB in 90 gleiche Theile getheilt werden; so heißt ein solcher neunzigster Theil vom rechten Winkel ein Grad des rechten Winkels, und der neunzigste Theil vom Quadranten ist ein Grad des Quadranten, oder, der Peripherie. Die ganze Peripherie des Kreises hat also 360 Grad; und alle Winkel am Mittelpunkte, oder überhaupt, alle Winkel, die um einen Punkt herum liegen, haben zusammen ebenfalls 360 Grad (§. 21 Zus.).

§. 191.

Anmerkung.

Jeder andere Winkel hat so viele Grade, als der Bogen zwischen seinen Schenkeln; und, wenn man die Größe eines Winkels in Graden, oder Theilen derselben angiebt, so ist (§. 18.) der rechte Winkel das Maaß desselben. Hätte z. B. ACD 57 Grad; so hieße das: $ACD = \frac{57}{90} R$. In der Ausübung misset man einen Winkel nach Graden, vermittelst des Instruments, was unter dem Namen Transporteur bekannt ist.

§. 192.

Anmerkung.

Der 60ste Theil eines Grades (der Peripherie und des rechten Winkels) heisset eine Minu-

te,

te, der 60ste Theil der Minute eine Sekunde, der 60ste Theil der Sekunde eine Tertie. Wenn nun z. B. der Winkel ACD 56 Grad, 49 Minuten, 53 Sekunden und 29 Tertien fasset, so schreibt man das so: ACD = 56° 49′ 53″ 29‴.

§. 193.

Anmerkung.

Die Winkel in einem Triangel haben zusammen 180 Grad (§. 84.). Wenn man also weiß, wie viel Grade der eine Winkel hat, so weiß man auch, wie viele die beiden andern zusammen betragen, wenn man nur die Grade des ersten von 180° abzieht. Ist die Anzahl der Grade zweyer Winkel bekannt; so kennt man auch den dritten. Man darf nur die Grade der beiden ersten von 180° abziehen.

§. 194.

Anmerkung.

Wenn im gleichschenklichten Dreyecke der Winkel zwischen den gleichen Schenkeln 60° beträgt, so hat jeder von den beiden andern auch 60° (§. 50.), und das Dreyeck ist gleichseitig (§. 67.). Auch in jedem gleichseitigen Dreyecke beträgt jeder Winkel 60° (§. 50.).

§. 195.

Zusatz.

Wenn ein Kreisbogen, EGF, $\frac{1}{6}$ von der Peripherie, oder 60° beträgt, so Fig. 63.

ist

ist seine Sehne, EF, dem Halbmesser gleich. Denn nun ist auch der Winkel ECF = 60° (§. 191.) und das Dreyeck ECF also gleichseitig (§. 194. §. 32.).

Auch umgekehrt: Wenn eine Sehne, EF, dem Halbmesser gleich ist; so beträgt der Bogen, EGF, 60° Grad und ist also $\frac{1}{6}$ von der Peripherie. Denn es ist alsdann das Dreyeck ECF gleichseitig, folglich der Winkel ECF = 60° (§. 194.), folglich auch der Bogen EGF = 60° (§. 191.).

§. 196.

Anmerkung.

Zum Maaße der Linien gebraucht man, in der Ausübung, die Länge eines Fußes, die aber freylich verschieden bestimmt und eingetheilt wird. Nach dem Rheinländischen Maaße, welches auch das Duodecimal- oder Werk-Maaß heißt, machen 12 Fuß eine Ruthe, der Fuß enthält 12 Zoll, der Zoll 12 Linien und die Linie 12 Skrupel. Wenn man 10 Fuß eine Ruthe nennt, und den Fuß in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien und die Linie in 10 Skrupel theilt, so hat man das geometrische oder Decimal-Maaß. Die Zeichen ° ′ ″ ‴ ⁗ bedeuten Ruthe, Fuß, Zoll, Linie, Skrupel. 7° 3′ 9″ 4‴ 5⁗, heißt: 7 Ruthen, 3 Fuß, 9 Zoll, 4 Linien, 5 Skrupel.

§. 197.

Anmerkung.

Wenn man Fußmaaße von verschiedener Länge mit einander zu vergleichen hat, so kann man sie, vermittelst der Regel Detri, auf einander reduciren, wenn man nur das Verhältniß des einen Fußes zum andern kennt. Wenn sich 1 Fuß der ersten Art zu 1 Fuß der andern Art verhält, wie a : b, so sind (Arithm. §. 171.) b Fuß der ersten Art = a Fuß der andern Art. Hat man also m Fuß der ersten Art und soll angeben, wie viel Fuß der andern Art sie ausmachen; so setzt man an

b Fuße der ersten Art geben a Fuße der andern
wie viel geben m Fuß?

und die gesuchte Zahl ist $= \frac{am}{b}$.

Wenn z. B. der Rheinländische Fuß sich zum Pariser Fuß verhält wie 13913 : 14400; so sind 14400′ Rheinl. = 13913′ Paris. Soll man nun 812′ Paris. in Rheinländische Fuß verwandeln, so hat man

13913′ Paris. 14400′ Rheinl.
Was geben 812′ Pariser?

Die gesuchte Zahl ist also $= \frac{14400 \cdot 812}{13913}$.

§. 198.

Anmerkung.

Bey dem geometrischen Maaße hat man den großen Vortheil, daß man mit Decimalbrüchen rech-

rechnen kann. Es kann daher, wie auch aus andern Gründen, oft vorkommen, daß man das gemeine Maaß in geometrisches verwandeln muß.

Es soll nun R, F, Z, L, S, Ruthe, Fuß, Zoll, Linie, Skrupel, nach geometrischen Maaß bezeichnen, und r, f, z, l, ſ, bedeute: Ruthe, Fuß, Zoll, Linie, Skrupel, nach dem Werkmaaße. Alsdann ist (§. 196.):

$$12\ z = 10\ Z;\ \text{folglich}\ z = \tfrac{10}{12}\ Z = 0{,}833''$$

$$144\ l = 100\ L;\ \text{folglich}\ l = \tfrac{100}{144}\ L = 0{,}69''' = 0{,}069''$$

$$1728\ ſ = 1000\ S;\ \text{folglich}\ ſ = \tfrac{1000}{1728}\ S = 0{,}57'''' = 0{,}0057''$$

Man sieht hieraus, wie viel man für jeden Zoll, jede Linie, jeden Skrupel Werkmaaß im geometrischen Maaße setzen müsse, und kann also die verlangte Reduktion leicht vornehmen. Man soll z. B. 6 z, 5 l, 4 ſ auf geometrisches Maaß bringen; so hat man:

$$6\ z = (0{,}833'').6 = 4{,}998''$$
$$5\ l = (0{,}069).5 = 0{,}345''$$
$$4\ ſ = (0{,}0057).4 = 0{,}022''$$

zusammen $= 5{,}365 = 6\ Z;\ 3\ L;\ 6{,}5\ S.$

Auf eben diese Art könnte man umgekehrt das geometrische Maaß in Werkmaaß verwandeln.

Hiebey

Hiebey ist die Größe des Fußes als einerley angenommen. Wäre auch diese verschieden, so wäre noch eine Reduktion nöthig, die man leicht, nach §. 197. vornimmt.

§. 199.

Anmerkung.

Es ist bey der Ausmessung aller Größen an sich völlig gleichgültig, welche Größe man als das Maaß derselben annehmen will; wenn nur dieses Maaß eine bekannte Größe und mit der zu messenden von einerley Art ist. Man kann daher bey der Ausmessung kleiner Größen ganz willkührlich eine kleine Größe als Maaß derselben festsetzen. Dieses Maaß kann man auch eben so benennen und eben so eintheilen, als es im Großen üblich ist. Ein so verkleinerter Maaßstab, heißt dann ein verjüngter.

IV.

Von den Vielecken.

§. 200.

Erklärung.

Ein Vieleck heißt **regulär**, wenn alle seine Seiten gleich groß sind, und alle seine Winkel auch. Widrigenfalls ist es **irregulär**. Das Quadrat und der gleichseitige Triangel sind also reguläre Figuren (§. 117. §. 50.).

§. 201.

Erklärung.

Ein Vieleck, ABDEFG, worin alle Seiten Sehnen eines Kreises sind, ist im Kreise beschrieben (ein inneres Polygon); und wenn alle Seiten eines Vieleckes, IKLMN, Tangenten eines Kreises sind; so ist es um den Kreis beschrieben, (ein äußeres Polygon).

Fig. 64.

§. 202.

Zusatz 1.

Jede Seite, AB, eines innern Vielecks ist kleiner, als der zugehörige Kreisbogen AB (§. 8.), also ist auch der ganze Umfang (der Perimeter) des Polygons kleiner als die Peripherie des Kreises. Imgleichen ist die Fläche des Polygons allemal kleiner als die Fläche des Kreises, weil diese die erstere und überdem noch die Segmente zwischen den Sehnen und Bogen in sich enthält.

§. 203.

Zusatz 2.

Zieht man bey dem äußern Polygone am Kreise zwischen dem Berührungspunkten grade Linien, ab, bc, cd, da, ea; so erhellet aus §. 8, daß jeder von den Kreisbogen zwischen den Berührungspunkten, wie agb, kleiner ist, als der zwischen den nämlichen Punkten liegende Theil aKb, von dem Perimeter des Vielecks. Also ist auch der ganze Perimeter des Vieleckes größer als

als die Peripherie des Kreises. Auch ist die Fläche des Vieleckes größer, als die Kreisfläche; denn sie enthält die letztere in sich, und überdem noch die vermischtlinichten Triangel, die von den Kreisbogen und den Polygonseiten eingeschlossen werden, wie agbk.

§. 204.

Lehrsatz.

Wenn die Peripherie eines Kreises bey A, B, D, E, F, G, in gleiche Bogen getheilt ist; so bilden die Sehnen dieser Bogen ein reguläres inneres Vieleck, ABDEFG. Fig. 64.

Beweis. Die Seiten dieses Vielecks sind gleich groß (§. 178.). Auch ist jeder Winkel desselben, ABD, jedem andern, EFG, gleich. Denn, wenn der Kreis in n gleiche Bogen getheilt ist, und die Peripherie p genannt wird; so ist der Bogen, worauf jeder von diesen Winkeln stehet, $= \frac{n-2}{n}$ p (§. 185.). Folglich ist das innere Vieleck, ABDEFG, regulär (§. 200).

§. 205.

Lehrsatz.

Wenn die Peripherie eines Kreises, bey a, b, d, e, f, g, in gleiche Bogen getheilt ist, und man ziehet durch diese Theilungspunkte Tangenten und verlängert sie, bis sie zusammentreffen; so sind alle diese Tangenten, AB, BD, DE, EF, FG, GH, gleich groß. Fig. 65.

Beweis. Aus dem Mittelpunkte des Kreises ziehe grade Linien in die Durchschnittspunkte, CA, CB, CD, CE, CF, CG; und nenne die Punkte, wo sie den Kreis schneiden: h, i, k, l, m, n. Nach der Voraussetzung sind die Bogen fg, ga, ab, gleich groß. Aber ng, gh, ha, ai, sind Hälften von ihnen (§ 181.). Also ist ng + gh = ha + ai; oder, hi = hn. Demnach ist ACB = ACG (§. 171.); und weil überdem CAB = CAG (§. 165.), CA = CA; so ist AB = AG (§. 88.).

§. 206.

Lehrsatz.

Auch ist, unter der gesetzten Bedingung, jeder von den Winkeln, welche die Tangenten formiren, dem andern gleich, wie E = F.

Beweis. Ziehe den Halbmesser Ce; so ist in den Dreyecken eEC und eFC, zuvörderst CeE = CeF (§. 161.). Ueberdem ist eCE = eCF, weil, wie vorher, der Bogen le = dem Bogen em ist (§. 171.). Folglich (§. 85.) ist auch CEe = CFe. Nun ist CEe = $\frac{1}{2}$E, und CFe = $\frac{1}{2}$F (§. 165); folglich ist E = F.

§. 207.

Zusatz.

Weil überdem auch Ce = Ce; so ist (§. 88). eE = eF. Also, Tangenten von der im vorigen

gen §. erwähnten Art, sind in den Berührungspunkten halbirt.

§. 208.

Lehrsatz.

Wenn ein Kreis, bey a, b, d, e, f, g, in gleiche Bogen getheilt ist; so formiren die durch diese Theilungspunkte gehenden Tangenten, AB, BD, DE, EF, FG, GA, ein reguläres, äußeres Vieleck. Fig. 65.

Beweis. Weil (§. 205.). die Seiten, und (§. 206.) die Winkel dieses Vielecks gleich sind, so ist es ein reguläres (§. 200.).

§. 209.

Erklärung.

Derjenige Punkt in der Fläche eines regulären Polygons, der von allen Seiten, ingleichen auch von allen Winkelpunkten desselben, gleich weit entfernt ist, heiße der **Mittelpunkt** des Polygons.

§. 210.

Aufgabe

Den Mittelpunkt eines regulären Polygons zu finden, auch, zu beweisen, daß es in jedem regulären Polygone einen solchen gebe. Fig. 66.

Auflösung. Von den Seiten des regulären Polygons nimm willkührlich AF, halbire (§. 53.) die daran liegenden Winkel, A und F,

und verlängere die halbirenden Linien, bis sie in G zusammenlaufen; so ist G der gesuchte Punkt.

Beweis. 1) Weil $A < 2R$ und $F < 2R$, so ist $GAF + GFA < 2R$. Also müssen die halbirenden Linien zusammenlaufen (§. 79.).

2) Da nun $A = F$ (§. 200), also auch $GAF = GFA$; so ist $GA = GF$ (§. 67.).

3) Ziehe GE. Da $GAF = GFE$, GA GF, $= AF = FE$ (§. 200); so ist auch $GF = GE$ (§. 57.). Eben so erhellet weiter, daß $GE = GD = GC = GB$ ist.

4) Ziehe die Perpendikel Gh, Gi, Gk, Gl, Gm, Gn, (§. 70.). Weil nun $GA = GF$, $GAh = GFi$, $GhA = GiF$ ist; so ist $Gh = Gi$ (§. 89.). Eben so erhellet, daß $Gi = Gk = Gl = Gm = Gn$ ist.

§. 211.

Erklärung.

Die grade Linie aus dem Mittelpunkte in einen Winkelpunkt des regulären Polygons, wie GA, heiße der größte Halbmesser desselben, und unter seinem kleinsten Halbmesser verstehe man den Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Seite, wie Gh. Ein Winkel, BAF, den zwey Seiten einschließen, ist ein Polygonwinkel, und ein Winkel, AGF, den zwey an einerley Seite liegende größte Halbmesser bilden, ein Centriwinkel.

Fig. 66.

§. 212.

Zusatz 1.

Ein größter Halbmesser, GA, halbirt den Polygonwinkel, A: denn sonst könnte man mit einer andern Linie halbiren, die auch von A in G ginge (§. 210.), gegen §. 6.

§. 213.

Zusatz 2.

Ein kleinster Halbmesser, Gh, halbirt die Seite, AF. (§. 210 Nr. 4. oder §. 63.)

§. 214.

Aufgabe.

Einen Kreis um und in ein reguläres Polygon zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Nimm den Mittelpunkt G, des Polygons zum Mittelpunkte des Kreises, den größten Halbmesser des erstern zum Halbmesser des andern und beschreibe den Kreis; so gehet er durch alle Winkelpunkte des Polygons (§. 210.). Nimmt man den kleinsten Halbmesser des Polygons, Gh, zum Halbmesser des Kreises, so muß dieser Kreis alle Seiten des Polygons inwendig berühren (§. 210.). Fig. 66.

§. 215.

Anmerkung.

Aus der Beschaffenheit der Triangel AGF, FGE, EGD u. s. f. (§. 210. Fig. 66.

210. 200) erhellet, daß die Centriwinkel in einem regulären Polygone alle gleich groß sind (§. 46.). Nun sind so viele Centriwinkel da, als das Polygon Seiten hat, und, da sie zusammen 4 R betragen (§. 23 Zus.) so findet man die Größe eines Centriwinkels, wenn man 4 R, oder 360°, durch die Anzahl der Seiten dividirt.

§. 216.

Anmerkung.

Fig. 66. Im Triangel AGF ist $GAF = \frac{1}{2}A$ und $GFA = \frac{1}{2}F$ (§. 212.), also $GAF + GFA$ macht einen Polygonwinkel aus. Folglich (§. 193.) wird bey einem regulären Polygone der Polygonwinkel gefunden, wenn man den Centriwinkel von 180° abzieht.

Im regulären Sechsecke z. B. ist der Centriwinkel = 60°; also der Polygonwinkel = 120° Folglich ist der halbe Polygonwinkel = 60°; also in dem Dreyecke AGF ist jeder Winkel = 60°; folglich (§. 97.) ist im regulären Sechsecke der größte Halbmesser der Seite gleich.

§. 217.

Anmerkung.

Um ein reguläres Polygon von einer vorgeschriebenen Anzahl Seiten mechanisch zu verzeichnen, kann man an dem Mittelpunkte eines Kreises die Centriwinkel des Polygons, vermittelst des Transporteurs verzeichnen. Dadurch wird

wird die Peripherie in so viel gleiche Bogen getheilt, als das Polygon Seiten bekommen soll; und, wenn man die Sehnen dieser Bogen ziehet, so hat man das verlangte Polygon.

§. 218.

Anmerkung.

In allen regulären Polygonen von gleich viel Seiten sind nicht allein die Centriwinkel, sondern auch die Polygonwinkel gleich groß. Denn wenn die Polygone n Seiten haben, so ist der Centriwinkel eines jeden $= \frac{360^\circ}{n}$ (§. 215.) und der Polygonwinkel eines jeden ist $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ (§. 216)

§. 219.

Lehrsatz.

Jedes reguläre Polygon, ABCDEF, ist so groß als ein Triangel, dessen Grundlinie, PQ, den Perimeter, und dessen Höhe den kleinsten Halbmesser des Polygons gleich ist. Fig. 66.

Beweis. Wenn man in den Polygone die größten Halbmesser, GA, GF, GE u. s. f. zieht, und die Polygonseiten zu Grundlinien der dadurch entstehenden Triangel, AGF, FGE u. s. f. annimmt, so ist der kleinste Halbmesser des Polygons die Höhe dieser Triangel. Folglich (§. 142.) sind alle diese Triangel zusammen so groß als PRQ; folglich ist auch ABCDEF = PQR.

Zweyter Abschnitt.
Von der Aehnlichkeit ausgedehnter Größen.

I.
Von der geometrischen Proportion.

§. 220.
Erklärung.

Größen, die ein gemeines Maaß haben, sind kommensurabel, die kein gemeines Maaß haben, inkommensurabel. Ein solcher Theil einer Größe, der in ihr aufgehet, heiße ein aliquoter Theil von ihr. Aliquote Theile zweyer Größen sind ähnlich, wenn sie gleichvielmal in ihren Ganzen enthalten sind: $\frac{1}{m}$ von a und $\frac{1}{m}$ von b sind ähnliche aliquote Theile.

§. 221.
Zusatz 1.

Wenn die Glieder eines Verhältnisses kommensurabel sind; so muß entweder das zweyte Glied selbst, oder irgend ein aliquoter Theil von ihm im ersten Gliede aufgehen. Wenn das nicht ist, so haben sie kein gemeines Maaß und sind inkommensurabel.

§. 222.

Zusatz 2.

Wenn die Glieder eines Verhältnisses inkommensurabel sind, so gehet weder das zweyte Glied selbst, noch irgend ein aliquoter Theil von ihm im ersten Gliede auf. Wenn das ist, so haben sie ein gemeines Maaß und sind kommensurabel.

§. 223.

Erklärung.

Eine Zahl, die sich bestimmt angeben läßt, heiße eine Rationalzahl; eine Irrationalzahl aber, die sich nicht bestimmt angeben läßt. Ein Verhältniß, dessen Exponent eine Rationalzahl ist, heißt ein rationales, dessen Exponent aber eine Irrationalzahl ist, ein irrationales Verhältniß.

§. 224.

Aufgabe.

Den Exponenten eines gegebnen Verhältnisses, a : b, zu finden.

Auflösung und Beweis. Der Exponent eines jeden Verhältnisses kann allgemein als ein Quotient ausgedrückt werden, wozu das Vorderglied das Dividendum und das Hinterglied den Divisor ausmacht. Denn, wenn das Vorderglied durch das Hinterglied dividirt wird, so findet man wie vielmal das letztere in dem ersten enthalten sey; welches eben das ist, was der Exponent an-

zeigen soll. So ist der Exponent des Verhältnisses $a : b = \frac{a}{b}$.

§. 225.

Aufgabe.

Den Exponenten eines rationalen Verhältnisses durch eine Zahl auszudrücken.

Auflösung und Beweis. 1) Wenn b in a aufgehet, so ist der Exponent des Verhältnisses die ganze Zahl, welche anzeigt, wie vielmal b in a enthalten ist.

2) Wenn zwar nicht b selbst, aber doch irgend ein aliquoter Theil von b in a aufgehet, so ist der Exponent der bestimmte Bruch, dessen Nenner den Theil von b benennt, der in a aufgehet, und dessen Zähler anzeigt, wie vielmal dieser Theil in a enthalten ist. Wäre $\frac{1}{m}$ von b in a n mal enthalten; so wäre der Exponent des Verhältnisses $a : b = \frac{n}{m}$.

§. 226.

Zusatz 1.

Wenn demnach der Exponent eines Verhältnisses ein Bruch, $\frac{n}{m}$, ist; so heißt das: $\frac{1}{m}$ vom zweyten Gliede ist n mal im ersten enthalten.

§. 227.

Zusatz 2.

Wenn weder b selbst, noch auch irgend ein aliquoter Theil davon in a aufgeht, so ist weder irgend eine ganze, noch auch irgend eine gebrochne Zahl genau der Exponent des Verhältnisses a : b; das ist, wenn die Glieder inkommensurabel sind, so ist das Verhältniß irrational.

Auch umgekehrt, wenn ein Verhältniß irrational ist, so sind seine Glieder inkommensurabel.

Folglich auch: Wenn ein Verhältniß rational ist, so sind seine Glieder kommensurabel; und umgekehrt.

§. 228.

Aufgabe.

Den Exponenten eines irrationalen Verhältnisses a : b durch eine Zahl so genau auszudrücken, daß nicht $\frac{1}{m}$ daran fehlt; es mag auch $\frac{1}{m}$ so wenig bedeuten, als man nur immer will.

Auflösung und Beweis. Nimm $\frac{1}{m}$ von b, und nimm dies von a so oft weg, bis ein Rest bleibt, der kleiner ist, als $\frac{1}{m}$ von b. Wenn man nun unter n die Zahl versteht, welche angiebt, wie vielmal $\frac{1}{m}$ von b, auf gedachte Art, von a weggenommen werden kann: so ist $\frac{1}{m}$ von b zwar etwas mehr als n mal, aber doch nicht völlig

(n + 1)

$(n+1)$ mal in a enthalten. Nähme man also $\frac{n+1}{m}$ zum Exponenten (§. 226.), so wäre das um etwas zuviel. Nimmt man $\frac{n}{m}$ zum Exponenten; so ist das zwar etwas zu wenig; aber es fehlt doch nicht völlig $\frac{1}{m}$ daran.

§. 229.

Zusatz 1.

Wenn man das, was an den Exponenten noch fehlt, durch x bezeichnet; so ist der ganze Exponent $= \frac{n}{m} + x$. Der erste Theil, $\frac{n}{m}$, ist alsdann rational und bekannt; der andere, x, ist zwar unbekannt und irrational; aber es ist doch gewiß, daß er kleiner ist, als die Einheit des Bruches, der den bekannten Theil ausdrückt, $x < \frac{1}{m}$.

§. 230.

Lehrsatz.

Wenn eine Größe, G, nur um etwas kleiner ist, als der ganze Exponent, $\frac{a}{b}$, eines irrationalen Verhältnisses, $a : b$; so kann man allemal diesen Exponenten so ausdrücken, daß der rationale Theil desselben größer als G wird.

Beweis. G ist nicht der ganze Exponent; sondern es fehlt noch etwas daran. Dies mag nun aber so wenig seyn, als man immer will; so kann man doch den Exponenten so genau durch

eine Zahl, $\frac{n}{m}$, ausdrücken, daß noch wenig daran fehlt (§. 228.). Folglich ist alsdann auch $\frac{n}{m} > G$.

Wenn man also (§. 229.) den ganzen Exponenten durch $\frac{n}{m} + x$ bezeichnet, so ist der erste, rationale Theil desselben größer als G.

§. 231.

Lehrsatz.

Wenn zwey Verhältnisse, a : b und c : d auch irrational sind; so ist es doch gewiß, daß sie gleich groß sind, wenn jeder aliquote Theil von dem Hintergliede des einen in dem Vordergliede desselben eben so vielmal enthalten ist, als der ähnliche aliquote Theil von dem Hindergliede des andern in dem Vordergliede dieses andern.

Beweis. 1) Wenn die Verhältnisse ungleich wären, und etwa der Exponent des zweyten, $\frac{c}{d}$, ein wenig kleiner wäre, als der Exponent des ersten; so könnte man den Exponenten des ersten so ausdrücken, daß sein rationaler Theil, $\frac{n}{m}$, größer würde, als der ganze Exponent des zweyten, $\frac{c}{d}$ (§. 230.).

2) Wenn nun der rationale Theil des ersten Exponenten $= \frac{n}{m}$, also (§. 226.) $\frac{1}{m}$ vom Hinter-

tergliede n mal im Vordergliede enthalten ist; so ist auch, laut der Voraussetzung, $\frac{1}{m}$ vom Hintergliede des zweyten Verhältnisses n mal in dem Vordergliede desselben enthalten; also der rationale Theil des zweyten Exponenten, $\frac{c}{d}$, auch $= \frac{n}{m}$.

Weil nun (Nr. 1.) $\frac{n}{m} > \frac{c}{d}$ wäre; so wäre um so mehr $\frac{n}{m} > \frac{n}{m}$; welches sich widerspricht.

§. 232.

Lehrsatz.

Wenn irrationale Verhältnisse, a : b und c : d, gleich groß sind, so ist jeder aliquote Theil von d eben so vielmal in c enthalten, als der ähnliche aliquote Theil von b in a enthalten ist.

Beweis. Widrigenfalls sey $\frac{1}{m}$ b in a, n mal, und $\frac{1}{m}$ d in c, n + 1 mal, enthalten. Alsdann ist der rationale Theil des ersten Exponenten $= \frac{n}{m}$, und der rationale Theil des andern $= \frac{n+1}{m}$. Wenn man nun den ganzen ersten Exponenten durch $\frac{n}{m} + x$ und den andern durch $\frac{n+1}{m} + y$ bezeichnet (§. 229); so ist schon der rationale

tionale Theil des andern größer als der erste, ganz genommen, $\frac{n+1}{m} > \frac{n}{m} + x$ (§. 229.). Folglich wären die Exponenten, mithin auch die Verhältnisse ungleich.

§. 233.

Lehrsatz.

Wenn in einer Proportion $a:b = c:d$ die Hinterglieder gleich sind, $b = d$; so sind auch die Vorderglieder gleich, $a = c$.

Beweis. Es ist $ad = bc$ (Arithm. §. 171.). Weil nun $d = b$ ist; so ist $\frac{ad}{d} = \frac{bc}{b}$ (Arithm. §. 79.), das ist, $a = c$.

Zusatz.

Eben so erhellet, daß die Hinterglieder, b und d, gleich groß seyn müssen, wenn die Vorderglieder, a und c gleich groß sind.

§. 234.

Lehrsatz.

Aus jeder Proportion $ma : a = mb : b$ folgt 1) $ma + a : a = mb + b : b$ und 2) $ma - a : a = mb - b : b$.

Beweis 1. Beide Verhältnisse sind gleich; denn ihr Exponennt ist $= m + 1$.

Beweis 2. Der Exponent beider Verhältnisse ist $= m - 1$.

§. 235.

Lehrsatz.

Wenn zwey Verhältnisse gleich sind; so ist ihnen auch das Verhältniß gleich, worin die Summe ihrer Vorderglieder zur Summe ihrer Hinterglieder stehet.

Beweis. Jede zwey gleiche Verhältnisse können durch die formel $ma : a = mb : b$ (Arith. §. 163.). vorgestellet werden. Denn, wenn auch die Verhältnisse irrational sind, und also ihr Exponent m eine Irrationalzahl ist; so haben doch beide einerley Exponenten. Setzet man nun das Verhältniß $ma + mb : a + b$; so ist der Exponent desselben ebenfalls $= m$; folglich $ma + mb : a + b = ma : a = mb : b$.

§. 236.

Lehrsatz.

Wenn drey oder mehrere Verhältnisse gleich groß sind; so ist das Verhältniß der Summe aller ihrer Vorderglieder zur Summe aller ihrer Hinterglieder auch eben so groß.

Beweis. Man setze: $a : m = b : n = c : o = d : p$. Weil also $a : m = b : n$, so ist (§. 235.). $a + b : m + n = b : n$. Folglich auch $a + b : m + n = c : o$. Also auch $a + b + c : m + n + o = d : p$, mithin (§. 235.) $a + b + c + d : m + n + o + p = d : p$.

§. 237.

Lehrsatz.

Wenn in zwey gegebenen Proportionen die Hinterglieder der ersten mit den Vordergliedern der andern einerley sind; so machen die Vorderglieder der ersten mit den Hintergliedern der andern auch eine Proportion: nämlich wenn

1) $A : a = B : b$; und
2) $a : \alpha = b : \beta$;

so folgt 3) $A : \alpha = B : \beta$.

Bew. Aus Nr. 1. folgt (Arithm. §. 169.) $A : B = a : b$, und aus Nr. 2 folgt $a : b = \alpha : \beta$ Folglich ist (Arithm. §. 161.) $A : B = \alpha : \beta$, mithin (Arithm. §. 169.) $A : \alpha = B : \beta$.

§. 238.

Lehrsatz.

Wenn die mittlern Glieder einer Proportion mit den äußern Gliedern einer andern einerley sind; so folgt daraus eine dritte Proportion, worin man die äußern Glieder der ersten zu äußern, und die mittlern Glieder der zweyten zu mittlern Gliedern nimmt: nämlich, wenn

1) $A : a = b : \beta$; und
2) $a : \alpha = B : b$;

so folgt 3) $A : \alpha = B : \beta$.

Bew. Aus Nr. 1. folgt (Arithm. §. 171.) $A\beta = ab$; und aus Nr. 2. folgt $ab = \alpha B$.

 Folglich

Folglich ist $A\beta = \alpha B$; folglich (Arithm. §. 177.) $A : \alpha = B : \beta$.

§. 239.

Erklärung.

Ein Verhältniß fängt an mit derjenigen Größe, die sein Vorderglied ausmacht, und hört auf mit derjenigen Größe, die sein Hinterglied ist. Mehrere Verhältnisse hängen stätig zusammen, wenn jedes folgende mit eben der Größe anfängt, womit das vorhergehende aufhört.

§. 240.

Erklärung.

Theile eines gegebnen Verhältnisses sind solche stätig zusammenhängende Verhältnisse, wovon das erste mit dem Vordergliede des gegebnen anfängt und das letzte mit dem Hintergliede desselben aufhört. Das Verhältniß $A : B$ enthält z. B. die beiden Theile: $A : c$, $c : B$, oder die drey Theile: $A : d$, $d : e$, $e : B$. Wenn man ein Verhältniß als aus Theilen bestehend betrachtet, so nennt man es ein zusammengesetztes, widrigenfalls ein einfaches Verhältniß; und wenn man ausdrücken will, daß ein Verhältniß, $A : B$, aus gewissen Theilen, $A : c$, $c : B$ zusammengesetzt sey; so wird das so geschrieben:

$$A : B = \left\{ \begin{matrix} A : c \\ c : B \end{matrix} \right\}$$

§. 241.

Erklärung.

Wenn man von einem Verhältnisse, A : B, sagt, daß es aus solchen Verhältnissen zusammengesetzt sey, welche doch nicht Theile desselben ausmachen, so heißt das nur: das Verhältniß A : B hat Theile, welche eben so groß sind, als die gedachten Verhältnisse. Ein Ausdruck, wie

$$A : B = \left\{ \begin{matrix} m : n \\ o : p \end{matrix} \right\}$$

will sagen: das Verhältniß A : B besteht aus Theilen, wovon der eine so groß ist, als das Verhältniß m : n und der andre so groß, als das Verhältniß o : p.

§. 242.

Erklärung.

Wenn ein Verhältniß aus gleichen Theilen zusammengesetzt ist, so heißt es ein vervielfachtes (ratio multiplicata); und insbesondere ein verdoppeltes, verdreifachtes u. s. f. wenn es aus zwey, oder drey gleichen Theilen, u. s. f. zusammengesetzt ist.

§. 243.

Lehrsatz.

Wenn zwey Verhältnisse, m : n und o : p gegeben sind und man multiplicirt ihre Vorderglieder ineinander, und ihre Hinterglieder auch; so ist das Verhältniß dieser Produkte aus den beiden gegebnen Verhältnissen zusammengesetzt.

Beweis. Man setze

1) $m:n = a:b$
2) $o:p = b:c$

so besteht das Verhältniß $a:c$ aus den beiden Theilen $a:b$ und $b:c$ (§. 240.), mithin auch (§. 241.)

$$a:c = \begin{Bmatrix} m:n \\ o:p \end{Bmatrix}$$

Nun ist (Nr. 1. und Arithm. §. 173) $b = \frac{na}{m}$, also (Nr. 2) $o:p = \frac{na}{m} : c$; folglich (Arithm. §. 173.) $c = \frac{pna}{om}$; folglich (Arithm. §. 79.) $\frac{c}{a} = \frac{pn}{om}$; oder $c:a = pn:om$, folglich (Arithm. §. 170.) $a:c = om:pn$.

Da nun $a:c = \begin{Bmatrix} m:n \\ o:p \end{Bmatrix}$ so ist auch $om:pn = \begin{Bmatrix} m:n \\ o:q \end{Bmatrix}$

§. 244.

Lehrsatz.

Der vorstehende Satz gilt auch von drey oder noch mehrern Verhältnissen.

Beweis. Wenn drey Verhältnisse, $m:n$, $o:p$, $q:r$, gegeben sind, so setze man

$$m:n = a:b$$
$$o:p = b:c$$
$$q:r = c:d$$

so ist (§. 240. 241.) $a:d = \left\{\begin{matrix} a:b \\ b:c \\ c:d \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} m:n \\ o:p \\ q:r \end{matrix}\right\}$

Ueberdem ist (§. 243). $om:pn = a:c$. Also hat man:

$$om:pn = a:c$$
$$q:r = c:d$$

folglich (§. 243.) $qom:rpn = a:d$. Folglich auch $qom:rpn = \left\{\begin{matrix} m:n \\ o:p \\ q:r \end{matrix}\right\}$

Eben so kann man zu drey Verhältnissen das vierte, zu vieren das fünfte, u. s. f. hinzusetzen.

§. 245.

Lehrsatz.

Wenn $a:b = c:d$; so ist auch $a^2:b^2 = c^2:d^2$.

Beweis. 1) Man setze das erste Verhältniß zweymal

$$a:b$$
$$a:b$$

so ist (§. 243.) $a^2:b^2 = \left\{\begin{matrix} a:b \\ a:b \end{matrix}\right\}$ und weil $c:d = a:b$, so ist auch $a^2:b^2 = \left\{\begin{matrix} c:d \\ c:d \end{matrix}\right\}$

 2 Eben

2) Eben so erhellet, daß auch $c^2 : d^2 = \left\{ \begin{matrix} c:d \\ c:d \end{matrix} \right\}$

Folglich ist $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

§. 246.

Zusatz.

Auf eben die Art wird gezeigt, daß, wenn $a : b = c : d$, alsdann auch $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$ ist; ferner $a^4 : b^4 = c^4 : d^4$; also überhaupt, $a^n ; b^n = {}^n : d^n$.

II.

Von dem Triangeln.

§. 247.

Erklärung.

Gradlinichte Figuren sind **ähnlich**, wenn alle Winkel der einen, der Reihe nach, den Winkeln der andern gleich, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, proportionirt, sind. Die Seiten, die zwischen den gleichen Winkeln liegen, können **gleichnamige** heißen.

§. 248.

Zusatz 1.

Gradlinichte Figuren sind also auch ähnlich, wenn ihre Winkel, der Reihe nach, gleich, und ihre gleichnamigen Seiten in einerley Verhältnisse sind.

Alle

§. 249.

Zusatz 2.

Alle reguläre Polygone, die gleich viel Seiten haben, sind einander ähnlich. Denn ihre Winkel sind der Reihe nach gleich (§. 218.) und ihre gleichnamigen Seiten sind in einerley Verhältnisse, weil in jedem regulären Polygone alle Seiten gleich groß sind (§. 206.).

§. 250.

Zusatz 3.

Größen, die aufeinander passen, sind ähnlich; wie auch diejenigen, die Einer dritten ähnlich sind.

§. 251.

Lehrsatz.

Wenn zwey Seiten eines Triangels von einer graden Linie, DE, geschnitten werden, die mit der dritten Seite welche die Grundlinie heißen mag, parallel ist; so sind 1) die abgeschnittenen Stücke an der Spitze, BD und BE, gegen ihre ganzen Seiten in einerley Verhältnisse, und 2) gilt eben das von den abgeschnittenen Stücken an der Grundlinie, DA und EC. Fig. 67.

Beweis 1. Theile BA in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (§. 124). Durch die Theilungspunkte, a, b u. s. f. ziehe grade Linien, parallel mit AC, also (§. 96.). auch mit DE. Dadurch wird BC in eben so viel gleiche Theile getheilt, als BA (§. 123.).

Da nun alle Theilungslinien mit DE parallel sind, also keine die DE durchschneiden kann; so kommen eben so viele Theile in BE zu liegen, als in BD zu liegen kommen. Demnach ist (§. 231.) BD : BA = BE : BC.

Beweis 2. Es erhellet eben so, daß DA : BA = EC : BC.

§. 252.

Zusatz 1.

Auch ist 1) BD : BE = BA : BC, und 2) DA : EC = BA : BC.

§. 253.

Zusatz 2.

Wenn man in der zweyten Proportion §. 251 die Verhältnisse umkehrt, und setzet:

BD : BA = BE : BC und
BA : DA = BC : EC

so ist (§. 237.) BD : DA = BE : EC.

§. 254.

Lehrsatz.

Fig. 67. Unter der gesetzten Bedingung, daß DE ⧣ AC sey; ist auch DE : AC = BE : BC = BD : BA.

Ziehe En ⧣ BA; so ist (§. 251. Nr. 2.) An : AC = BE : BC. Da nun (§. 111.) DE = An; so ist DE : AC = BE : BC; also auch BD : BA.

§. 255.

Zusatz.

Da (§. 82.) D = A, B = B, E = C, und ferner BD : BA = BE : BC = DE : AC; so ist △ DBE ∾ △ ABC.

§. 256.

Lehrsatz.

Wenn zwey Seiten eines Dreyecks von einer graden Linie DE so geschnitten werden, daß die abgeschnittenen Stücke mit ihren ganzen Seiten in einerley Verhältnisse sind, BD : BA = BE : BC; so ist DE mit der dritten Seite, AC, parallel. Fig. 67.

Beweis. Wenn nicht DE ⵌ AC wäre; so sey irgend eine andre, Di ⵌ AC. Alsdann ist (§. 251.) BD : BA = Bi : BC. Da nun auch BD : BA = BE : BC ist, so ist (Arithm. §. 161.) Bi : BC = BE : BC; und, weil BC = BC; so wäre (§. 233.) Bi = BE; welches widersprechend ist.

§. 257.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen Linien a, b, c die vierte Proportionale zu finden.

Auflösung. Nimm willkührlich einen Winkel, A. Auf dem einen Schenkel desselben nimm AG = a. AC = b, und auf dem andern AF = c. Ziehe GF; und durch C die CB ⵌ GF; so ist AB die gesuchte Linie. Fig. 68.

Beweis. Im Triangel CAB ist (§. 251.) AG : AC = AF : AB. Also, Gleiches für Gleiches gesetzt, a ; b = c : AB.

§. 258.

Zusatz.

Eben so findet man, bey einer stätigen Proportion, zu zwey gegebenen Linien, a und b, die dritte Proportionale, wenn man AG = a, AC = b und AF auch = b macht.

§. 259.

Lehrsatz.

Wenn Dreyecke, abc und ABC, einen gleichen Winkel haben, a = A, und das eine Paar der anliegenden Seiten sich verhält, wie das andere, ac : AC = ab : AB; so verhält sich auch das dritte Paar der Seiten eben so, wie das erste und zweyte. Auch sind die übrigen Winkel gleich, diejenigen nämlich, die von den proportionalen Seiten eingeschlossen werden, b = B, c C.

Fig. 68.

Beweis 1). Mache AG = ac, AF = ab ziehe FG; so ist (§. 57.) FG = bc, AFG = b, AGF = c; und, weil ac : AC = ab : AB, so ist auch AG : AC = AF : AB; mithin (§. 256.) FG ‡‡ BC.

2) Weil also FG ‡‡ BC; so ist FG : BC = AG ; AC (§. 254); und, wenn man Gleiches für Gleiches setzt (Nr. 1), so ist bc : BC = ac ; AC.

3) Weil

3) Weil b = AFG (Nr. 1.) und B = AFG (§. 81.); so ist b = B. Eben so erhellet, daß c = C ist.

§. 260.

Zusatz.

Demnach sind Dreyecke ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel haben und die anliegenden Seiten proportionirt sind.

§. 261.

Lehrsatz.

Wenn Dreyecke, abc und ABC, lauter gleiche Winkel haben, a = A, b = B c = C; so sind auch die gleichnamigen Seiten in einerley Verhältnisse, ac : AC = ab : AB = bc : BC. Fig. 69.

Beweis. Wenn etwa ac : AC nicht = ab : AB wäre; so sey ac : AC = ab : AD, oder = ab : AE.

Im ersten Falle ziehe DC; so wäre (§. 259) b = ADC; und weil auch b = B ist; so wäre ADC = B; welches nicht möglich ist (§. 59.).

Im andern Falle ziehe EC, so wäre (§. 259). b = E; und da auch b = B ist; so wäre E = B; welches (§. 59.) unmöglich ist.

§. 262.

Zusatz.

Also sind Dreyecke ähnlich, wenn sie lauter gleiche Winkel haben.

Win-

§. 263.

Lehrsatz.

Wenn in Dreyecken, abc und ABC, alle drey paar Seiten in einerley Verhältnisse sind, ac : AC = ab : AB = bc : Bc; so sind auch die Winkel gleich, die von den proportionalen Seiten eingeschlossen werden, a = A, b = B, c = C.

Fig. 70.

Beweis. Wenn das nicht wäre, und etwa A < a wäre; so sey CAD = a. Mache nun AD = AB, und ziehe DC. Alsdann ist, weil AD = AB, laut der Voraussetzung ac : AC = ab : AD. Folglich ist (§. 259.)

	bc : Dc = ac : AC
Ueberdem	bc : Bc = ac : AC (per hyp.)
Folglich	bc : DC = bc : BC

Folglich wäre (§. 233.) DC = BC; gegen §. 46. Zusatz.

§. 264.

Zusatz.

Also sind Dreyecke ähnlich, wenn alle drey Paare ihrer Seiten in einerley Verhältnisse sind.

§. 265.

Lehrsatz.

Wenn Dreyecke, abc und ABC einen gleichen Winkel haben, a = A, und das eine Paar der anliegenden Seiten sich verhält, wie das gegenüberstehende Paar, ac : AC

Fig. 69.

:AC : bc : BC, und wenn endlich die gegenüber-stehenden Seiten größer sind, als die anliegenden BC > AC, und bc > ac; so verhält sich das dritte Paar der Seiten eben so, wie das erste und zweyte, ac : AC = ab : AB.

Beweis. Wenn ac : AC nicht = ab AB wäre, so sey ac : AC = ab : AD oder = ab : AE.

1) Im ersten Falle ziehe DC; so ist (§. 259.)

bc : DC = ac : AC
Ueberdem bc ; BC = ac : AC (per hyp.)
Folglich bc : DC = bc : AC

Mithin wäre (§. 233.) DC = BC; welches unmöglich ist, wenn BC > AC ist (§. 73).

2) Im andern Falle ziehe EC; so erhellet eben so daß BC = EC seyn müßte; welches aber aus eben dem Grunde, wie bey Nr. 1. unmöglich ist.

§. 266.

Zusatz.

Demnach sind Triangel, unter der gesetzten Bedingung, einander ähnlich (§. 263.).

§. 267.

Lehrsatz.

Wenn in einem rechtwinklichten Dreyecke, ABC, aus der Spitze des rechten Winkels, B, ein Perpendikel, BD, Fig. 71. auf

auf die Hypothenuse herabfällt; so theilt er das Dreyeck in zwey kleinere, die beide dem ganzen, mithin auch unter sich, ähnlich sind.

Beweis. 1) Es ist BDA = R = B (§. 18.), ferner A = A, mithin (§. 85.) auch ABD = C. Folglich (§. 261.) △ ABD ∾ △ ABC.

2) Eben so erhellet, daß △ DBC ∾ △ ABC.

3) Folglich (§. 250.) △ ABD ∾ △ DBC.

§. 268.

Zusatz.

Der gedachte Perpendikel, BD, ist sonach die dritte Proportionale zwischen den beiden Abschnitten, worin er die Hypothenuse theilt. Denn in den ähnlichen Dreyecken ABD und DBC ist (§. 261.) AD : BD : BD : DC.

§. 269.

Lehrsatz.

Wenn auf dem Diameter eines Kreises irgendwo ein Perpendikel, BD, aufgerichtet wird, der bis in die Peripherie gehet, so ist er die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten, AD, DC, worin er den Diameter theilt.

Fig. 72.

Beweis. Ziehe AB, BC; so ist (§. 187.) ABC = R; folglich (§. 267.) AD : DB : DC.

Zusatz.

Auch ist jede von den Sehnen, AB und BC die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und dem anliegenden Stücke desselben. Denn 1) weil (§. 267.) △ ABC ∾ △ ABD; so ist AC:AB:AD; und weil 2) (§. 267.) △ ABC ∾ △ DBC; so ist AC : BC : DC.

§. 270.

Aufgabe.

Es sind zwey Linien, a und b, gegeben; man soll die mittlere, stätige Proportionale finden.

Auflösung. Auf einer graden Linie nimm AD = a, DC = b. Halbire (§. 54.) AC in in c; und verzeichne einen Kreis mit dem Halbmesser cA = cC. In D errichte den Perpendikel DB; so ist dieser die gesuchte Linie. Fig. 72.

Beweis. Es ist AD : DB : DC (§ 269); also, Gleiches für Gleiches gesetzt, a : DB : b.

III.

Von andern Figuren außer dem Triangel.

§. 271.

Lehrsatz.

In ähnlichen Polygonen, ABCDE und abcde, verhält sich jedes Paar gleichnamiger Diagonalen, wie zwey gleichnamige Seiten. Fig. 73.

Be-

Beweis. Wenn die durch einerley Buchstaben bezeichneten Winkel die gleichen Winkel sind (§. 247.); so sind ac und AC, imgleichen ab und AB, gleichnamige Diagonalen.

Weil nun b = B, und ab : AB = bc : BC (§. 247.); so ist auch ac : AC = bc : BC (§. 259.); folglich (§. 247.) auch = cd : CD.

2). Weil überdem (§. 247.) c = C, und (§. 259.) bca = BCA; so ist auch c — bca = C — BCA; das ist, acd = ACD.

Da demnach acd = ACD und (Nr. 1.) ac : AC = cd ; CD; so ist (§. 259.) ad : AD = cd : CD.

§. 272.

Lehrsatz.

Aehnliche Polygone werden durch gleichnamige Diagonalen in ähnliche Dreyecke getheilt.

Fig. 73.

Beweis. Ziehe die gleichnamigen Diagonalen ac, AC und ad, AD. Alsdann ist ab : AB = bc : BC = ac : AC (§. 271.); folglich (§. 263.) Δ abc ∾ Δ ABC.

Eben so erhellet, daß Δ acb ∾ Δ ACD, und Δ ada ∾ Δ ADE.

§. 273.

Lehrsatz.

Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwey gleichnamige Seiten oder Diagonalen. Fig. 73.

Beweis. Weil (§. 347.) die Verhältnisse

ab : AB
bc : BC
cd : CD
de : DE
ea : EA

gleich groß sind, so ist (§. 236.) ab + bc + cd de + ea : AB + BC + CD + DE + EA = ab : AB; folglich auch (§. 271.) = ac : AC

§. 274.

Lehrsatz.

In ähnlichen regulären Polygonen, ABC DEF und abcdef, verhalten sich die größten Halbmesser, GA, ga, wie die Seiten. Fig. 74.

Beweis. Ziehe noch GF, gf. Nun ist A = a (§. 247.) und (§ 212.) GAF = $\frac{1}{2}$A, gaf = $\frac{1}{2}$a; folglich GAF = gaf. Aus eben dem Grunde ist GFA = gfa, und überdem (§. 218.) AGF = agf; folglich (§. 261.) GA : ga = AF : af.

§. 275.

Lehrsatz.

Auch verhalten sich die kleinsten Halbmesser GH und gh, wie die größten, mithin auch wie die Seiten. Fig. 74.

Beweis. Weil (§. 274.) GAH = gah, ferner GHA = gha (§. 211. §. 18.), mithin, auch (§. 85.) AGH = agh; so ist (§. 261.) GH : gh = GA : ga.

§. 276.

Zusatz.

Aus dem allen ergiebt sich, daß, wenn ähnliche Polygone regulär sind, alsdann ihre Perimeter sich auch verhalten, wie die größten, imgleichen auch wie die kleinsten Halbmesser.

§. 277.

Erklärung.

Wenn man von krummen Linien ABC und abc, solche Theile, AB, ab, nimmt, die den ganzen proportionirt sind, und die durch ihre Endpunkte laufenden Tangenten, DF und FE, de und fe, gleiche Winkel machen, AEB = aeb; und wenn das allemal zutrifft, man mag die proportionirten Theile so groß oder klein nehmen, als man will; so sind die krummen Linien einander ähnlich. Fig. 75.

§. 278.

Lehrsatz.

Ein Winkel ACD am Mittelpunkte eines Kreises verhält sich zu 4R, wie sein Bogen zu der ganzen Peripherie, p. Fig. 63.

Beweis. Fange in A an und theile die Peripherie in eine beliebige Anzahl gleicher Bogen Aa, ab, u. s. f. und ziehe dann die Halbmesser Ca, Cb u. s. f. so werden die 4R am Mittelpunkte (§. 21. Zus.) in eben so viel gleiche Theile getheilt (§. 171.). Da nun überdem von diesen Theilen allemal eben so viele in ACD enthalten sind, als AD von jenen Theilen der Peripherie enthält, so ist (§. 231.) ACD : 4R = AD : p.

§. 279.

Zusatz.

Ist also $AD = \frac{1}{m} p$; so ist auch $ACD = \frac{1}{m} 4R$.

§. 280.

Lehrsatz.

Alle Kreise sind einander ähnlich. Fig. 67.

Beweis. 1) Nimm von P irgend einen Theil, AB, und von p einen Theil, ab, der sich eben so zu p verhält, als AB zu P. Wenn also $AB = \frac{1}{m} P$ ist, so ist auch $ab = \frac{1}{m} p$. Folglich (§. 279.) ist $ACB = \frac{1}{m} 4R$, und $acb = \frac{1}{m} 4R$; folglich ACB = acb.

 2) Durch

2) Durch A und B ziehe die Tangenten DE, FE; durch a und b eben so die Tangenten de, fe. Nun ist in den Vierecken ACBE, acbe, zuerst ACB = acb (Nr. 1.); überdem (§. 161.) CAE = cae, CBE = cbe; folglich (§. 103.) AEB = aeb; folglich sind die Kreise ähnlich.

Dritter Abschnitt.

Von dem Verhältnisse solcher Größen, die weder gleich noch ähnlich sind, nebst einigen Folgen aus dieser Lehre.

§. 281.

Dreyecke, DEF und ABC, verhalten sich wie ihre Grundlinien, DF und AC, wenn sie einerley Höhe haben.

Fig. 77.

Beweis. 1) Mache AG = DF und ziehe BG; so ist auch (§. 137.) △ ABG = △ DEF.

2) Theile AC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, Aa, ab u. s. f. und ziehe Ba, Bb u. s. f. so wird △ ABC in eben so viel gleiche Theile getheilt (§. 137.). Auch sind von diesen Theilen allemal eben so viele in △ ABG enthalten, als AG von jenen Theilen der AC enthält. Demnach ist (§. 231.) △ ABG : △ ABC = AG : AC

3) Also, Gleiches für Gleiches gesetzt (Nr. 1.), △ DEF : △ ABC = DF : AC.

§. 282.

§. 282.

Lehrsatz.

Dreyecke, ABC und DEF verhalten sich wie ihre Höhen BG : EH, wenn ihre Grundlinien gleich sind, AC = DF. Fig. 78.

Beweis. 1) In B setze LB = AC senkrecht auf BG und ziehe LG; so ist auch (§. 137.) △ GLB = △ ABC. Eben so errichte in E die ME = DF = AC = LB senkrecht auf EH und ziehe MH; so ist △ HME = △ DEF.

2) Nimmt man nun in den Dreyecken GLB und HME die Seiten BG und EH als Grundlinien an; so ist, weil alsdann die Höhen, LB und ME gleich sind, nach §. 281, △ GLB : △ HME = BG : EH.

3) Folglich wenn man Gleiches für Gleiches setzt (Nr. 1.) so ist:

△ ABC : △ DEF = BG : EH.

§. 283.

Lehrsatz.

Das Verhältniß zweyer Dreyecke, ABC : DEF, ist allemal zusammengesetzt aus dem Verhältnisse ihrer Grundlinien, AC : DF, und ihrer Höhen, BG : EH. Fig. 79.

Beweis. Man verzeichne einen Hülfstriangel, DBF. Seine Grundlinie, DF, sey einerley mit der Grundlinie, DF, des zweyten gegebenen,

und seine Höhe, BG, einerley mit der Höhe, BG, des ersten gegebenen, Dreyecks. Alsdann hat man aus §. 281. und §. 282:

$$\triangle ABC : \triangle DBF = AC : DF.$$
$$\triangle DBF : \triangle DEF = BG : EH.$$

Nun ist (§. 240.) $\triangle ABC : \triangle DEF = \left\{ \begin{matrix} \triangle ABC : \triangle DBF \\ \triangle DBF : \triangle DEF \end{matrix} \right\}$

Folglich auch (§. 241) $\triangle ABC : \triangle DEF = \left\{ \begin{matrix} AC : DF \\ BG : EH \end{matrix} \right\}$

§. 284.

Zusatz 1.

Weil (§. 243.) auch $AC \times BG : DF \times EH = \left\{ \begin{matrix} AC : DF \\ BG : EH \end{matrix} \right\}$ so ist $\triangle ABC : \triangle DEF = AC \times BG : DF \times EH$. Also verhalten sich Dreyecke auch wie die Produkte aus ihren Grundlinien in die Höhen.

§. 285.

Zusatz 2.

Die vorstehenden Sätze §. 281 — §. 284 gelten auch von den Parallelogrammen. Denn die Hälften der Parallelogramme sind Triangel, die mit ihnen gleiche Grundlinie und Höhe haben (§. 138.) und so wie sich die Hälften verhalten, so verhalten sich auch die Ganzen.

§. 286.

Lehrsatz.

Zwey Triangel, oder zwey Parallelogramme sind gleich groß, wenn sich ihre Höhen umgekehrt wie ihre Grundlinien verhalten.

Beweis. Es seyen A und B zwey Dreyecke, oder zwey Parallelogramme. Die Grundlinie von A verhalte sich zur Grundlinie von B, wie m : n; und die Höhe von A zur Höhe von B, wie n : m; so ist (§. 283. §. 285.) $A : B = \begin{Bmatrix} m : n \\ n : m \end{Bmatrix}$; folglich ist (§. 240. §. 284.) A : B = m : m = mn : nm; das ist, A = B.

§. 287.

Lehrsatz.

Quadrate sind im verdoppelten Verhältniß ihrer Seiten.

Beweis. Das Verhältniß aller Parallelogramme ist zusammengesetzt aus dem Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen. Weil aber (§. 117.) in einem Quadrate Grundlinie und Höhe einerley ist; so bestehet das Verhältniß der Quadrate aus zwey Theilen, wovon jeder so groß ist, als das Verhältniß der Grundlinien, oder der Höhen; das ist, Quadrate sind im verdoppelten Verhältnisse ihrer Seiten (§. 242).

§. 288.

Zusatz.

Wenn sich zwey Linien verhalten wie zwey andere, so verhalten sich auch die Quadrate der beyden erstern, wie die Quadrate der beiden andern. Denn das Verhältniß der beyden erstern Quadrate bestehet aus zwey Theilen, die eben so groß sind, als die beyden Theile, woraus das Verhältniß der beyden andern Quadrate bestehet.

§. 289.

Lehrsatz.

Ein Quadrat, ABCD, ist einem andern Parallelogramme, EFGH, gleich, wenn die Seite desselben die mittlere Proportinale ist zwischen der Grundlinie des Parallelogramms, EF, und der Höhe desselben HL.

Fig. 80.

Beweis. Wenn EF : AB = AB : HL, oder (§. 117.) EF : AB = AD : HL; so sind die Grundlinien und Höhen beyder Parallelogramme im umgekehrten Verhältnisse. Folglich (§. 286.) ABCD = EFGH.

§. 290.

Lehrsatz.

Wenn ABC, DEF, ähnliche Dreyecke sind, und man nimmt ein Paar gleichnamige Seiten, AC, EF, als Grundlinien an;

Fig. 78.

an; so verhalten sich die Höhen, BG und EH, wie die Grundlinien.

Beweis. Weil (§. 247.) A = D, BGA = R = EHD; so ist auch (§. 85.) ABG = DEH. Folglich ist (§. 261.) BG : EH = AB : DE; folglich auch (§. 248.) BG : EH = AC : DF.

§. 291.

Zusatz 1.

Demnach ist (§. 283.) $\triangle ABC : \triangle DEF = \left\{ \begin{matrix} AC : DF \\ AC : DF \end{matrix} \right\}$; oder, ähnliche Dreyecke sind in verdoppelten Verhältnisse ihrer gleichnamigen Seiten.

§. 292.

Zusatz 2.

Weil (§. 287.) auch $AC^2 : DF^2 = \left\{ \begin{matrix} AC : DF \\ AC : DF \end{matrix} \right\}$ so ist $\triangle ABC : \triangle DEF = AC^2 : DF^2$; das ist, ähnliche Dreyecke verhalten sich, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

§. 293.

Lehrsatz.

Alle ähnliche Polygone überhaupt, abcde, ABCDE, verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten, $ab^2 : AB^2$. Fig. 73.

Beweis. 1) Weil (§. 248.) $ab : AB = bc : BC = cd : CD = de : DE = ea : EA$; so ist (§. 288.) $ab^2 : AB^2 = bc^2 : BC^2 = cd^2 : CD^2 = de^2 : DE^2 = ea^2 : EA^2$.

2) Ziehe die gleichnamigen Diagonalen, ac und AC, ad und AD; so ist (§. 272. §. 292.) $\Delta abc : \Delta ABC = ab^2 : AB^2$; $\Delta acd : \Delta ACD = cd^2 : CD^2$; $\Delta ade : \Delta ADE = de^2 : DE^2$.

Mithin ist (Nr. 1.) $\Delta abc : \Delta ABC = \Delta acd : \Delta ACD = \Delta ade : \Delta ADE$; folglich (§. 236.) $\Delta abc + \Delta acd + \Delta ade : \Delta ABC + \Delta ACD + \Delta ADE = \Delta abc : + \Delta ABC = ab^2 : AB^2$; das ist, $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$.

§. 294.

Zusatz 1.

Aehnliche Polygone verhalten sich auch, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Diagonalen (§. 271. 288.).

§. 295.

Zusatz 2.

Wenn ähnliche Polygone regulär sind; so verhalten sie sich auch, wie die Quadrate ihrer größten oder kleinsten Halbmesser (§. 288. §. 274. §. 275.).

§. 296.

Aufgabe

Es sind zwey ähnliche Polygone, m und M, gegeben, imgleichen zwey gleichnamige Seiten derselben; ab und AB; man soll die diesen Seiten ebenfalls gleichnamige Seite eines solchen Polygons, μ, finden, das den gegebnen auch ähnlich, und so groß ist, als beyde zusammen.

Auflösung. Setze ab und AB unter einem rechten Winkel an einander und ziehe die Hypothenuse bB, so ist diese die gesuchte Seite. Fig. 73.

Beweis. Weil (§. 293.) $AB^2 : ab^2 = M : m$; so ist (§. 234.) $AB^2 + ab^2 : ab^2 = M + m : m$; folglich auch (§. 144.) $bB^2 : ab^2 = M + m : m$. Da nun auch (§. 293.) $\mu : m = bB^2 : ab^2$; so ist $\mu : m = M + m : m$; folglich (§. 233.) $\mu = M + m$.

§. 297.

Erklärung.

Eine gegebene Figur quadriren heißt, ein Quadrat machen, das der gegebnen Figur gleich ist.

§. 298.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm, das kein Quadrat ist zu quadriren.

Auflösung. Nimm (§. 270.) die mittlere Proportionallinie zwischen der Grundlinie und

Höhe

Höhe des gegebnen Parallelogramms; so ist dieselbe die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Das Quadrat der gedachten mittlern Proportionale ist dem gegebnen Parallelogramme gleich (§. 289.).

§. 299.

Aufgabe.

Ein Dreyeck, T, zu quadriren.

Auflösung. Mache ein Parallelogramm, P, das mit T eine gleiche Grundlinie hat und halb so hoch ist, als T. Quadrire (§. 298.) P, so ist auch T quadrirt.

Beweis. Wäre P auch eben so hoch als T, so wäre P = 2 T (§. 138.). Ist also T nur halb so hoch, so ist P = T (§. 285.). Ein Quadrat also, was so groß ist als P, ist auch so groß als T.

§. 300.

Aufgabe.

Ein reguläres Vieleck zu Quadriren.

Auflösung. Statt des Vielecks quadrirt man den Triangel, der dem Vielecke gleich ist (§. 219.).

§. 301.

Aufgabe.

Ein irreguläres Polygon zu quadriren.

Auflösung. Theile das Polygon durch Diagonalen in Triangel; mache (§. 299.) Quadrate, die

die diesen Triangeln gleich sind, und addire dieselben in ein Quadrat zusammen (§. 146.); so ist dieses leztere Quadrat dem gegebenen Polygone gleich.

§. 302.

Erklärung.

Zum Maaße der Flächen braucht man ein Quadrat, und nennt es Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll, Quadratlinie, Quadratscrupel, je nachdem seine Seite eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll eine Linie, oder einen Scrupel lang ist.

§. 303.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Parallelogramms, P, in Quadratmaaße zu finden.

Auflösung. Man messe Grundlinie und Höhe des Parallelogramms mit einerley Längenmaaße, und multiplicire hienächst beyde in einander; so zeigt das herauskommende Produkt den gesuchten Flächeninhalt an, und zwar in demjenigem Quadratmaaße, was mit dem gebrauchten Längenmaaße einerley Namen hat.

Beweis. Das Produkt aus der Grundlinie und Höhe von P sey = m n. Mache ein Quadratmaaß, Q, was mit dem gebrauchten Längenmaaße einerley Namen hat; so ist (§. 302.) Grundlinie und Höhe desselben = 1; also das

Pro-

Produkt aus Grundlinie und Höhe von $Q = 1 \times 1 = 1$. Folglich (§. 285.).

$$P : Q = mn : 1$$

Also P enthält Q sovielmal in sich, als mn Eins in sich enthält, oder, sovielmal, als mn anzeigt.

§. 304.

Zusatz 1.

Der Flächeninhalt eines Dreyecks wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe multiplicirt, und das herauskommende Produkt halb nimmt (§. 138.).

§. 305.

Zusatz 2.

Den Flächeninhalt eines regulären Polygons giebt also das halbe Produkt aus dem Perimeter und dem kleinsten Halbmesser desselben (§. 219.)

§. 306.

Zusatz 3.

Der Flächeninhalt eines Quadrats ergiebt sich, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

§. 307.

Zusatz 4.

Beym Decimalmaaße enthält ein Quadratfuß 100 Quadratzoll, und so fasset jedes Quadratmaaß 100 von dem nächstfolgenden kleinern. Beym Duodecimalmaaße dagegen enthält jedes

Qua=

Quadratmaaß 144 Quadratmaaße von der nächstkleinern Art.

§. 308.

Zusatz 5.

Der Flächeninhalt eines irregulären Polygons läßt sich finden, wenn man dasselbe durch Diagonalen in Triangel theilt, den Inhalt jedes Triangels für sich berechnet, und alsdann alles zusammen addirt.

§. 309.

Aufgabe.

Die dritte Seite eines rechtwinklichten Dreyecks zu berechnen, wenn zwey davon bekannt sind.

Auflösung und Beweis. Wenn a den einen Kathetus, b den andern und c die Hypothenuse bezeichnet; so hat man $c^2 = a^2 + b^2$; folglich

$$1)\ c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$
$$2)\ a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$$
$$3)\ b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$$

§. 310.

Zusatz 1.

Wenn die Seite, AG, und der größte Halbmesser, CA, eines regulären Polygons bekannt sind, so findet man den kleinsten Halbmesser $CH = \sqrt{(CA^2 - AH^2)}$ also $CH = \sqrt{(CA^2 - \frac{1}{4}AG^2}$; weil (§. 213. $AH = \frac{1}{2}AG$, also (§. 287.) $AH^2 = \frac{1}{4}AG^2$. Fig. 81.

§. 311.

§. 311.

Zusatz 2.

Der Halbmesser des Kreises, CA, sey ein für allemal = 1. Ueberdem nenne man der Kürze wegen, die Seite des innern regulären Polygons l, den kleinsten Halbmesser desselben r, die Seite des äußern regulären Polygons von eben so viel Seiten, nähmlich PQ, heiße L, und der größte Halbmesser desselben, nähmlich CP, werde R genannt. Alsdann ist $r = \surd (1 - \frac{1}{4} l^2)$.

Fig. 81.

§. 312.

Zusatz 3.

Ferner ist (§. 275.) 1) r : 1 = l : L, folglich $L = \frac{l}{r}$; 2) r : 1 = 1 : R, also $R = \frac{1}{r}$. So kann aus dem innern Polygone das zugehörige äußere gefunden werden.

§. 313.

Zusatz 4.

Wenn man CH bis T verlängert; so wird der Bogen AG in T halbirt (§. 181). Folglich ist die Sehne AT die Seite eines innern regulären Polygons, was doppelt so viel Seiten hat, als das erste. Nun ist $AT = \surd (TH^2 + AH^2)$ (§. 309.); und es läßt sich dieser Ausdruck, wenn das erstere Polygon schon berechnet ist, auf einen bekannten Ausdruck bringen.

Es

Es ist nämlich $TH = 1 - r$; und $AH = \frac{1}{2} l$. Folglich ist $AT = \sqrt{((1-r)^2 + \frac{1}{4} l^2)}$.

Aus jedem regulären Polygone im Kreise kann also das folgende von doppelt so viel Seiten, mithin auch wieder das diesem zugehörige äußere, gefunden werden.

§. 314.

Aufgabe.

Der Halbmesser des Kreises ist $= 1$, man soll die Grenzen in ganzen Zahlen bestimmen, innerhalb welcher die Peripherie, p, enthalten ist.

Auflösung und Beweis. 1) Mache (§. 195.) ein reguläres Sechseck im Kreise; so ist die Seite desselben, $l = 1$, weil der Halbmesser des Kreises $= 1$ ist. Mithin der Perimeter des Sechseckes $= 6$. Fig. 81.

2) Ferner ist (§. 311.) $r = \sqrt{(1 - \frac{1}{4} l^2)}$, und weil $l = 1$ ist, so ist $r = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})}$ $= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025\ldots$

3) Weiter ist (§. 312.) die Seite, L, des äußern regulären Sechseckes $= \frac{1}{r}$; also $L = \frac{1}{0{,}866025} = 1{,}1547..$ Folglich ist der Perimeter des äußern Sechsecks $= 1{,}1547 \times 6 = 6{,}9282$, also < 7.

Folglich ist (Nr. 1. Nr. 3. und §. 202. §. 203.) p > 6 und < 7.

§. 315.

Zusatz.

Es ist also $\frac{1}{7}$ von der Peripherie allemal kleiner als der Halbmesser.

§. 316.

Lehrsatz.

Fig. 82.

Wenn ein Kreisbogen, AD, kleiner ist, als ein anderer, AB, und man zieht durch die Endpunkte des erstern Tangenten, AE und DE, und durch die Endpunkte des andern ebenfalls, Tangenten AF und BF; so ist die gerade Linie, CE, die aus dem Mittelpunkte des Kreises in dem Durchschnittspunkt der beiden erstern Tangenten gehet, kleiner als die grade Linie, CF, aus dem Mittelpunkte in den Durchschnittspunkt der beiden andern Tangenten.

Beweis. Ziehe den Halbmesser CA; so ist in dem Dreyecke ACE der Winkel CAE = R (§. 161.), folglich (§. 59.) CEF > R, folglich (§. 69.) CE < CF.

§. 317.

§. 317.

Zusatz.

Je kleiner die gleichen Bogen sind, worin ein Kreis getheilt ist, desto kleiner ist auch der größte Halbmesser des äußern regulären Polygons, das entsteht, wenn man durch die Endpunkte dieser Bogen Tangenten ziehet (§. 208.).

§. 318.

Aufgabe.

Es ist eine grade Linie, CF, gegeben, die den Halbmesser des Kreises um etwas sehr weniges übertrift; man soll ein reguläres Polygon um den Kreis verzeichnen, dessen größter Halbmesser kleiner als CF ist.

Auflösung. 1) Von F ziehe (§. 188.) die Tangenten FA, FB. Fig. 82.

2) Fange von A an und halbire (§. 151. §. 173. §. 180.) die Peripherie, die dadurch entstehenden gleichen Bogen wieder, diese wieder, und das so lange fort, bis Bogen, wie etwa AD, entstehen, die kleiner sind, als der Bogen AB. Alsdann ziehe Tangenten durch die Endpunkte dieser zuletzt gefundenen Bogen; so entstehet das verlangte Polygon.

Beweis. Daß 1) ein reguläres Polygon entstehet, erhellet aus §. 208.

Wenn 2) AD einer von den zuletzt gefundenen gleichen Bogen ist, und man ziehet die Tan-

genten AE, DE; so ist CE der größte Halbmesser des erwähnten Polygons (§. 211.). Aber CE < CF (§. 316.).

§. 319.

Aufgabe.

Es ist eine Zahl $1 + \frac{1}{m}$ gegeben, die nnr sehr wenig größer als 1 ist; man soll in und um den Kreis zwey ähnliche reguläre Polygone verzeichnen, die einander so nahe kommen, daß der Exponent des Verhältnisses ihrer Perimeter kleiner als $1 + \frac{1}{m}$ ist; oder, daß $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{m}$ wird, wenn man unter Q den Perimeter des äußern und unter q den Perimeter des innern Polygons verstehet.

Auflösung. Verlängere den Halbmesser Fig. 81. CA, bis W, so das $CW = (1 + \frac{1}{m})$ CA wird. Verzeichne alsdann (§. 318.) ein äußeres reguläres Polygon, dessen größter Halbmesser, CP, kleiner als CW ist; und (§. 204. §. 249.) ein inneres von eben so viel Seiten; wozu die Kreisbogen, von den größten Halbmessern des äußern abgeschnitten werden; so sind dies die verlangten Polygone.

Beweis. 1) Weil nähmlich $CW = (1 + \frac{1}{m})$ CA ist; so ist $\frac{CW}{CA} = \frac{(1 + \frac{1}{m}) CA}{CA} = 1 + \frac{1}{m}$ und da CP < CW ist; so ist $\frac{CP}{CA} > 1 + \frac{1}{m}$

Das

Da ferner 2) CA der größte Halbmesser des innern und CP der des äußern Polygons ist; so ist (§. 276). $\frac{Q}{q} = \frac{CP}{CA}$ folglich $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{m}$.

§. 320.

Zusatz.

Ist der Halbmesser des Kreises, CA, $= 1$; so ist $\frac{Q}{q} = \frac{CP}{1} = CP$. Wenn also der größte Halbmesser des äußern Polygons $< 1 + \frac{1}{m}$ ist; so ist auch $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{m}$.

§. 321.

Aufgabe.

Um und in den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone zu verzeichnen, deren Perimeter, Q und q, einander so nahe kommen, daß ihr Unterschied, $Q - q$, weniger beträgt, als $\frac{1}{m}$ vom Halbmesser CA, es mag auch $\frac{1}{m}$ CA so wenig bedeuten als man nur immer will.

Auflösung. Nimm $1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7}$ als eine gegebene Zahl, und verzeichne (§. 319) um und in den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone so, daß $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7}$ wird: so sind dies die verlangten Polygone.

Beweis. Man setze $Q - q = d$, also $Q = q + d$. Alsdann ist $\frac{q}{q} + \frac{d}{q} > 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7}$; oder, $1 + \frac{d}{q} > 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7}$; folglich $\frac{d}{q} < \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7}$; folglich $d < \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7} q$.

Da nun $\frac{1}{7} q$ kleiner ist, als $\frac{1}{7}$ von der Kreisperipherie (§. 202.); so ist auch (§. 315.) $\frac{1}{7} q < CA$; und, weil $d < \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7} q$ war; so ist um so mehr $d < \frac{1}{m} CA$.

§. 322.

Zusatz. 1.

Wenn also des äußern Polygons größter Halbmesser $< 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7}$ ist; so ist die Differenz der Perimeter auch kleiner als $\frac{1}{m}$ vom Halbmesser des Kreises.

§. 323.

Zusatz. 2.

Wenn man unter δ die Differenz versteht, um welche sich die Peripherie des Kreises von dem Perimeter des innern oder äußern Polygons unterscheidet; so ist allemal $\delta < d$. Es mag also ein noch so kleiner Theil des Halbmessers gegeben seyn, so kann doch allemal δ noch kleiner werden.

§. 324.

Zusatz 3.

Wenn eine Linie, l, kleiner ist als die Peripherie des Kreises, p; so giebt es im Kreise allemal ein reguläres Polygon, dessen Perimeter, q, größer als l ist. Denn l mag sich von p unterscheiden so wenig als man will; so kann man doch machen, daß sich q noch weniger davon unterscheidet.

§. 325.

Zusatz 4.

Wenn eine Line, L, größer als p ist; so giebt es allemal ein reguläres Polygon um den Kreis dessen Perimeter, Q, kleiner als L ist. Denn L mag p so wenig als man will übertreffen, so kann man doch ein äußeres Polygon machen, dessen Perimeter Q die Peripherie q noch weniger übertrifft.

§. 326.

Zusatz 5.

Eine Linie, die größer ist als der Perimeter eines jeden innern, und kleinern als der Perimeter eines jeden äußern regulären Polygons, ist der Kreisperipherie gleich, weil sie weder kleiner (§. 324.) noch größer (§. 325.) seyn kann.

§. 327.

Lehrsatz.

Das Verhältniß des Halbmessers zur Peripherie ist in allen Kreisen einerley.

Beweis. 1). Man denke sich einen Kreis mit dem Halbmesser R und nenne seine Peripherie P; und noch irgend einen andern mit dem Halbmesser r, und nenne die Peripherie desselben p. Nun nehme man an, es sey R : P nicht = r : p, oder, welches eins ist, R : r nicht = P : p; und setze, R : r = P : l.

2) Man denke sich nun um den ersten Kreis irgend ein reguläres Polygon, dessen Perimeter Q heiße, und um den andern ein reguläres Polygon von eben so viel Seiten und nenne die Peripherie desselben q. Alsdann ist Q : q = R : r (§. 276); folglich (Nr. 1) Q : p = P : l. Weil aber nun allemal P < Q ist (§. 203); so ist auch allemal l < q.

3) Denkt man sich ferner in dem ersten Kreise irgend ein reguläres Polygon, dessen Perimeter N heißt, und in dem andern ein reguläres Polygon von eben so viel Seiten und nennt den Perimeter desselben n; so ist (§. 276.) N : n = R : r, folglich (Nr. 1) N : n = P : l. Da nun (§. 202) allemal P < N ist; so ist auch allemal l < n.

4) Demnach ist (§. 326.) l = p; und, weil (Nr. 1) P : p nicht = R : r, so ist auch P : l nicht = R : r, welches (Nr. 1) widersprechend ist.

§. 328.

Zusatz.

Mithin ist auch das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie in allen Kreisen einerley.

§. 329.

§. 329.

Aufgabe.

Der Durchmesser des Kreises, ist $= 1$, man soll die Länge der Peripherie so genau angeben, daß nicht $\frac{1}{m}$ daran fehlt; es mag nun $\frac{1}{m}$ so wenig bedeuten als man nur will.

Auflösung und Beweis. Nimm (§. 314) ein reguläres Sechseck im Kreise, berechne (§. 313.) hieraus das Zwölfeck, daraus das Vierundzwanzigeck, und so fort, bis ein Polygon kömmt, (§. 321.) dessen Perimeter sich von dem Perimeter des zugehörigen äußern Polygons, mithin um so mehr (§. 323.) von der Peripherie des Kreises, nicht mehr um $\frac{1}{m}$ unterscheidet. Wenn man alsdann den Perimeter des innern oder äußern Polygons für die Kreisperipherie setzt; so beträgt der Fehler nicht $\frac{1}{m}$.

§. 330.

Zusatz 1.

Auf diesem, freylich sehr mühsamen Wege, statt dessen die höhere Mathematik kürzere lehrt, findet man für den Durchmesser $= 1$ die Peripherie $=$

$$3,14159265358979323846264338379 \ldots$$

§. 331.

Zusatz 2.

Man nenne diese Zahl, die man bis auf noch viel mehr Decimalstellen berechnet hat, ein für allemal Π; und nehme davon jedesmal so viele Decimalstellen, als es die erforderliche Schärfe der Rechnung mit sich bringt. Bezeichnet man dann die Peripherie des Kreises durch p, und den Durchmesser durch d; so ist $\frac{p}{d} = \Pi$, folglich $p = \Pi d$. Eben so ist $\frac{p}{2r} = \Pi$; also $p = 2\Pi r$.

§. 332.

Zusatz 3.

Folglich, auch umgekehrt $\frac{p}{\Pi} = d = 2r$.

§. 333.

Zusatz 4.

Die Zahl Π ist der Exponent des Verhältnisses des Durchmessers zur Peripherie.

Anmerkung.

Schon Archimedes hat für das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser diese beiden Grenzen angegeben, $22 : 7$ und $21\frac{70}{71} : 7$.

§. 334.

Lehrsatz.

Der Halbmesser eines Kreises, r, die Länge eines Bogens a, und die Zahl der Grade desselben be=

bestimmen einander so, daß, wenn zwey von diesen Größen bekannt sind, daraus allemal die dritte gefunden werden kann.

Beweis. Aus der Proportion $360° : n° = 2\Pi r : a$, oder, $180° : n° = \Pi r : a$, folgt

$$1)\ a = \frac{n \Pi r}{180},$$

$$2)\ n = \frac{180 . a}{\Pi r},$$

$$3)\ r = \frac{180 . a}{\Pi n}$$

§. 335.

Aufgabe.

Man soll um und in den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone verzeichnen, deren Flächen Q und q, einander so nahe kommen, daß der Exponent ihres Verhältnisses, $\frac{q}{Q}$ weniger beträgt als $1 + \frac{1}{m}$ es mag nun diese Zahl so wenig größer als 1 seyn, wie man will.

Auflösung. Verlängere den Fig. 81. Halbmesser CA bis X, so, daß $CX = (1 + \frac{1}{m})$ CA wird; nimm (§. 270.) zwischen CX und CA, die mittlere Proportionale, CW; und verzeichne (§. 318) ein äußeres reguläres Polygon, dessen größter Halbmesser, CP, kleiner als CW wird, und hienächst das zugehörige innere; so sind diese Polygone die verlangten.

Beweis. 1) Weil CW die mittlere Proportionale ist zwischen CX und CA; so ist (§.289) $CW^2 = CX \cdot CA$, und weil $CX = (1 + \frac{1}{m})$ CA; so ist $CW^2 = (1 + \frac{1}{m}) CA \cdot CA$ $= (1 + \frac{1}{m}) CA^2$; folglich $\frac{CW^2}{AC^2} = \frac{(1 + \frac{1}{m}) CA^2}{CA^2}$ $= 1 + \frac{1}{m}.$

2) Da nun $CP < CW$, mithin auch $CP^2 < CW^2$ ist, so ist $\frac{CP^2}{CA^2} < 1 + \frac{1}{m}.$

3) Da endlich (§. 295.) $\frac{Q}{q} = \frac{CP^2}{CA^2}$ ist; so ist $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{m}.$

§. 336.

Lehrsatz.

Wenn q die Fläche irgend eines regulären Polygons im Kreise bezeichnet; so ist allemal $\frac{1}{4} q$ kleiner als das Quadrat des Halbmessers. Fig. 83.

Beweis. Wenn man ein Quadrat ABDE um den Kreis verzeichnet, und die senkrechten Diameter FG, MN ziehet; so ist klar, daß das Quadrat um den Kreis viermal so groß ist, als das Quadrat des Halbmessers. Daher ist (§. 203.) die Kreisfläche, folglich (§. 302) auch q nicht viermal so groß als das Quadrat des

Halb-

Halbmessers; folglich ist $\frac{1}{4}$ q kleiner als das Quadrat des Halbmessers.

§. 337.

Aufgabe.

Um und in den Kreis ein Paar ähnliche reguläre Polygone zu verzeichnen, deren Flächen, Q und q, einander so nahe kommen, daß ihr Unterschied, Q — q, weniger beträgt, als $\frac{1}{m}$ vom Quadrate des Halbmessers, es mag auch $\frac{1}{m}CA^2$ so wenig bedeuten, wie man will.

Auflösung. Nimm $1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4}$ als eine Zahl, und verzeichne (§. 335.) zwey Polygone, so das $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4}$ wird; so sind das die verlangten. Fig. 81.

Beweis. Man setze $Q - q = d$, also $Q = q + d$. Da nun $\frac{Q}{q} < 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4}$ ist; so ist auch $\frac{q}{q} + \frac{d}{q} < 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4}$. Folglich $1 + \frac{d}{q} < 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4}$; folglich $\frac{d}{q} < \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4}$; folglich $d < \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4} q$; folglich um so mehr (§. 336.) $d < \frac{1}{m} \cdot CA^2$

§. 338.

Zusatz 1.

Wenn eine Fläche S, kleiner ist, als die Kreisfläche; so giebt es allemal ein inneres reguläres Polygon, dessen Fläche, q, größer als S ist. Denn

Denn S mag der Kreisfläche so nahe kommen, wie man will; so kann doch q derselben noch näher kommen.

§. 339.

Zusatz 2.

Wenn eine Fläche, S, größer ist als die Kreisfläche; so giebt es allemal ein äußeres reguläres Polygon, dessen Fläche Q, kleiner ist, als S. Denn S mag den Kreis so wenig, als man will übertreffen; so kann man doch machen, daß Q denselben noch weniger übertrifft.

§. 340.

Zusatz 3.

Eine Fläche, M, die größer ist als jedes innere reguläre Polygon, und kleiner als jedes äußere, ist der Kreisfläche gleich. Denn es kann M weder kleiner (§. 338) noch größer (§. 339) als die Kreisfläche seyn.

§. 341.

Lehrsatz.

Die Kreisfläche C, ist einem Dreyecke T, gleich, dessen Grundlinie so groß ist als die Peripherie p, und dessen Höhe so groß ist, als der Halbmesser r.

Beweis. 1) Die Fläche des Dreyecks T ist (§. 304.) $= \frac{1}{2} pr$.

2) Nun denke man sich irgend ein reguläres Polygon im Kreise, nenne den Perimeter m und

und den kleinsten Halbmesser ϱ; so ist die Fläche desselben (§. 305) $= \frac{1}{2} m\varrho$. Da nun allemal (§. 202) $m < p$, und überdem noch $\varrho < r$ ist; so ist $\frac{1}{2} m\varrho < \frac{1}{2} pr$, folglich T größer als jedes innere Polygon.

3) Wenn ferner M den Perimeter irgend eines regulären Polygons um den Kreis bedeutet, so ist die Fläche desselben (§. 305.) $= \frac{1}{2} Mr$. Da nun (§. 203.) allemal $M > p$ ist; so ist allemal $\frac{1}{2} Mr > \frac{1}{2} pr$; also T kleiner als jedes äußere Polygon.

4) Demnach (§. 340.) ist $T = C$.

§. 342.

Zusatz 1.

Den Flächeninhalt eines Kreises giebt also das halbe Produckt aus der Peripherie und dem Halbmesser.; $C = \frac{1}{2} pr$.

§. 343.

Zusatz 2.

Man kann auch den Kreis, so genau als verlangt wird quadriren, wenn man statt desselben, das §. 341. erwähnte Dreyeck quadrirt.

§. 344.

Zusatz 3.

Weil $C = \frac{1}{2} pr$, folglich auch $= \frac{1}{4} pd$ ist; und weil überdem (§. 331.) $p = 2\Pi r = \Pi d$ ist; so hat man

1) $C = \frac{1}{2} . 2 \Pi r . r = \Pi r^2$: und
2) $C = \frac{1}{4} \Pi d . d = \frac{1}{4} \Pi d^2$.

§. 345.

Zusatz 4.

Es verhält sich demnach 1) die Kreisfläche zum Quadrate des Halbmessers $= \Pi r^2 : r^2 = \Pi : 1$; 2) verhält sich auch die Kreisfläche zum Quadrate des Durchmessers $= \frac{1}{4} \Pi d^2 : d^2 = \frac{1}{4} \Pi : 1$.

§. 346.

Zusatz 5.

Wenn C und K zwey Kreise, r und R ihre Halbmesser, p und D ihre Durchmesser sind; so hat man

1) $C : r^2 = \Pi : 1$, und $K : R^2 = \Pi : 1$, also $C : r^2 = K : R^2$, oder $C : K = r^2 : R^2$; also verhalten sich Kreise, wie die Quadrate ihrer Halbmesser. Eben so

2) $C : d^2 = \frac{1}{4} \Pi : 1$ und $K : D^2 = \frac{1}{4} \Pi : 1$, folglich $C : d^2 = K : D^2$, oder, $C : K = d^2 : D^2$. Also verhalten sich Kreise auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

§. 347.

Aufgabe.

Aus der Fläche eines Kreises, C, den Halbmesser, r, zu finden.

Auflösung. Dividire die gegebene Kreisfläche mit der Zahl Π und ziehe alsdann hieraus die

die Quadratwurzel, so giebt dieselbe den gesuchten Halbmesser.

Beweis. Es ist (§. 344.) $\pi r^2 = C$, folglich $r^2 = \frac{C}{\pi}$; folglich $r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$.

§. 348.

Lehrsatz.

Ein Kreisausschnitt, ACD, verhält sich zur ganzen Kreisfläche, wie sein Bogen AD, zur ganzen Peripherie. Fig. 63.

Beweis. Wenn man von A anfängt und die Peripherie in eine beliebige Anzahl gleicher Bogen theilt, und hiernächst in die Theilungspunkte Halbmesser zieht; so wird die Kreisfläche in eben so viel gleiche Sektoren getheilt (§. 171. § 169). Auch kommen von diesen Sektoren allemal eben so viele in ACD zu liegen, als von jenen Bogen in AD fallen. Folglich, wenn p die Peripherie und C die Fläche des Kreises bedeutet; so ist (§. 231.) CAD : C = AD : p.

§. 349.

Lehrsatz.

Ein Sektor, S, ist einem Dreyecke, T, gleich, dessen Grundlinie so groß ist, als der Bogen des Sektors, a, und dessen Höhe so groß ist, als der Halbmesser r.

Beweis. 1) Die Fläche des Dreyeckes T ist (§. 304.) $= \frac{1}{2}$ a r.

2) Ferner ist (§. 348. §. 342.) $p : a = \frac{1}{2} pr : S$; folglich $S = \frac{\frac{1}{2} pra}{p} = \frac{1}{2} ra$.

Folglich $S = T$.

§. 350.

Zusatz 1.

Den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes findet man also, wenn man das Produkt aus dem Bogen desselben in den Halbmesser halb nimmt.

§. 351.

Zusatz 2.

Einen Kreisausschnitt kann man quadriren, wenn man, statt desselben, das §. 349. erwähnte Dreyeck quadrirt.

§. 352.

Zusatz 3.

Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, NGQ, wird gefunden, wenn man von dem Flächeninhalte des Sektors NCGQ den Flächeninhalt des Dreyckes NCG abzieht. Fig. 83.

§. 353.

Lehrsatz.

Das Quadrat im Kreise ist halb so groß, als das Quadrat um den Kreis, und die Kreisfläche verhält sich zu den erstern wie $\frac{1}{2}\pi : 1$. Fig. 83.

Beweis. 1) Wenn man Fig 83. noch die Sehnen NF, FM, MG, GN zieht; so ist NFMG das innere Quadrat.

2) Ist $NFMG = AF^2 + AN^2$ (144.) $= \frac{1}{2} ABDE$; oder, $2\, NFMG = ABDE$.

3) Weil die Kreisfläche $C : ABDE = \frac{1}{4}\pi : 1$; so ist auch $C : 2\, NFMG = \frac{1}{4}\pi : 1$, oder, $C : NFMG = \frac{1}{4}\pi : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi : 1$.

Drittes Buch.

Körperliche Geometrie.

Erster Abschnitt.

Von der Lage der Ebenen.

§. 1.

Forderungssatz.

Durch jede drey Punkte, A, B, C, auch wenn sie nicht in grader Linie liegen, eine Ebene zu legen.

Fig. 84.

§. 2.

Grundsatz.

Durch drey Punkte, die nicht in grader Linie liegen, ist nur Eine Ebene möglich.

§. 3.

Zusatz 1.

Wenn zwey Ebenen drey Punkte, die nicht in grader Line liegen, gemein haben, so fallen sie in- einander.

§. 4.

Zusatz 2.

Jeder gradlinichte Triangel liegt in einerley Ebe- ne. Auch schließen drey Ebenen keinen Raum ein.

§. 5.

§. 5.

Lehrsatz.

Wenn von einer graden Linie zwey Punkte in einer gewissen ebenen Fläche liegen, so liegt solche Linie ganz in dieser Ebene.

Beweis. Wenn das nicht wäre; so würde die Fläche gar nicht eben seyn (Eb. Geom. §. 14.).

§. 6.

Zusatz.

Eine Ebene, LM, und eine grade Linie, DE, können einander nur in Einem Punkte, F schneiden. Fig. 84.

§. 7.

Lehrsatz.

Zwey Ebenen, AB und EF, schneiden einander in grader Linie ab.

Beweis. Widrigenfalls, wenn ab nicht grade wäre, so gäbe es in der Ebene AB zwischen a und b eine andere Linie, die grade wäre, und in der Ebene EF ebenfalls; welches unmöglich ist (Ebene Geom. §. 6.). Fig. 86.

§. 8.

Zusatz.

Außer der graden Linie ab haben beide Ebenen nichts gemein.

§. 9.

Erklärung.

Eine grade Linie, CD, und eine Ebene, LM,
Fig. 85. sind miteinander parallel, wenn man beide, so weit man will, erweitern kann, ohne daß sie irgendwo zusammenlaufen.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie, CD, mit einer Ebene, LM, parallel ist, und eine durch
Fig. 85. CD gelegte Ebene, ABCD, die LM in AB schneidet; so ist auch CD mit AB parallel.

Beweis. Wenn nicht CD # AB wäre; so müßte CD mit AB zusammenlaufen; folglich auch weil AB in der Ebene LM liegt, mit LM. Alsdann aber wäre nicht CD # LM, welches der Voraussetzung widerstreitet.

§. 11.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie, CD, mit einer andern, AB, die in der Ebene LM liegt, parallel ist; so ist auch CD, mit LM parallel.

Beweis. CD kann mit LM nicht zusammenlaufen: 1) Nicht in AB; weil sonst nicht CD # AB wäre; 2) auch nicht in irgend einen andern Punkte, X. Denn sonst hätten die Ebenen, LM und ABDC (Eb. Geom. §. 74.)

mehr

mehr als zwey Punkte, A, B, X, die nicht in grader Linie lägen, miteinander gemein; welches nicht möglich ist (§. 3.).

§. 12.

Erklärung.

Eine grade Linie, FE, ist auf einer Ebene, LM, senkrecht, wenn sie auf allen graden Linien senkrecht ist, die in der Ebene LM durch den Punkt E gehen. Fig. 87.

§. 13.

Lehrsatz.

Eine grade Linie, FE, ist auf einer Ebene, LM, senkrecht, wenn sie auf zween graden Linien in ihr, AB, CD, in dem Durchschnittspunkte derselben, E, senkrecht ist. Fig. 87.

Beweis. 1) Ziehe durch E willkührlich irgend eine dritte Linie, gh. Mache AE = BE, CE = DE; ziehe AC und BD. Weil nun auch AEC = BED; so ist (Eb. Geom. §. 57) AC = BD, und der Winkel C = dem Winkel D.

2) Weil CE = DE, C = D, CEg = DEh so ist (Eb. Geom. §. 88.) gC = hD, gE = hE.

3) Ziehe noch die Hülfslinien FA, Fg, FC, und FB, Fh, FD. Weil nun (per hyp.) FEA = R = FEB, ferner FE = FE und AE

 = BE

= BE (Nr. 1.); so ist (Eb. Geom. §. 57.) FA = FB; und aus eben den Gründen FC = FD. Da überdem (Nr. 1.) AC = BD war; so ist (Eb. Geom. §. 46.) FCA = FDB, oder, FCg = FDh.

4) Weil also (Nr. 3.) FCg = FDh, FC = FD und (Nr. 2.) gC = hD; so ist (Eb. Geom. §. 57.) Fg = Fh.

5) Da demnach (Nr. 4.) Fg = Fh; ferner (Nr. 2.) gE = hE, und endlich FE = FE; so ist (Eb. Geom. §. 46.) FEg = FEh = R (Eb. Geom. §. 18.).

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie, FE, auf mehrern andern, AB, CD, gh, in dem Durchschnittspunkte derselben, E, senkrecht ist; so liegen alle diese andern Linien in einerley Ebene.

Fig. 87.

Beweis. Widrigenfalls könnte man durch A, E, C, eine Ebene legen (§. 1.). Diese würde von der Ebene gFE geschnitten, und die Durchschnittsline würde mit FE einen rechten Winkel machen (§. 13.), der größer oder kleiner wäre als der rechte Winkel EEg, je nachdem gE unter oder über die Ebene AEC fiele. Welches unmöglich ist (Eb. Geom. §. 20.).

§. 15.

Lehrsatz.

Der Perpendikel, FE, ist die kürzeste Linie, die von einem Punkte, F, auf eine Ebene, LM, gezogen werden kann. Fig. 87.

Beweis. Man ziehe irgend eine andere, Fh; und überdem Eh in der Ebene LM; so hat man den Triangel EFh. Darin ist FEh = R (§. 12.) folglich (Eb. Geom. §. 69.) FE < Fh.

§. 16.

Zusatz 1.

Die kürzeste Linie, FE, die von einem Punkte, F, auf eine Ebene, LM, herabgehet, ist auf dieser Ebene senkrecht. Sonst wäre eine andere, etwa FH, senkrecht, und diese wäre noch kürzer; welches sich widerspricht.

§. 17.

Zusatz 2.

Der Perpendikel FE ist die Entfernung des Punktes F von der Ebene LM.

§. 18.

Zusatz 3.

Aus einerley Punkte, F, können nicht zwey Perpendikel FE und Fh auf eine Ebene LM herabgehen, weil sonst (§. 12.) FEh = R, und auch FhE = R seyn würde; welches nicht mög-

 lich

lich ist (Eb. Geom. §. 62.). Auch können in einerley Punkte in der Ebene nicht zwey Perpendikel stehen.

§. 19.

Lehrsatz.

Wenn zwey Ebenen, AB und EF einander durchschneiden; so kann eine grade Linie, em, nicht auf beiden Ebenen zugleich senkrecht seyn.

Fig. 86.

Beweis. In einen beliebigen Punkt, f, der Durchschnittslinie ziehe man mf in der Ebene AB und ef in der Ebene EF. Wäre nun em auf beiden Ebenen senkrecht; so wäre (§. 12.) fme = R, und fem = R; welches nicht möglich ist (Eb. Geom. §. 62.).

§. 20.

Erklärung.

Wenn zwey Ebenen AB und EF einander durchschneiden, so haben sie einen Neigungswinkel, worunter man denjenigen Winkel, efg, verstehe, der entsteht, wenn man durch einen beliebigen Punkt, f, in der Durchschnittslinie die grade Linie fg in der einen Ebene, und die grade Linie fe in der andern, auf die Durchschnittslinie, ab, senkrecht setzet. Wenn der Neigungswinkel ein rechter ist; so sind die Ebenen aufeinander senkrecht.

Fig. 86.

§. 21.

Zusatz.

Wenn zwey Ebenen, AB und CD einander durchschneiden; so ist ihre Durchschnittslinie ab, auf der Ebene efg ihres Neigungswinkels senkrecht. Denn ab ist senkrecht auf fe und fg (§. 13.).

§. 22.

Lehrsatz.

Wenn zwey grade Linien, AB und CD, mit einer dritten, EF, die nicht in derselben Ebene liegt, parallel sind; so sind sie auch unter sich parallel. Fig. 88.

Beweis. 1) AB und EF liegen in einerley Ebene, ABFE (Eb. Geom. §. 74.). Eben so liegen CD und EF in einerley Ebene EFDC. Weil nun CD ‡‡ EF; so ist auch (§. 11.) CD ‡‡ ABFE; folglich (§. 9.) kann CD mit AB nirgends zusammenlaufen.

2) Auch liegen CD und AB in einerley Ebene. Widrigenfalls lege (§. 1.) durch A, B, C, eine Ebene ABHG, welche die EFDC in einer graden Linie, CM durchschneidet. Weil nun EF ‡‡ AB, so ist (§. 11.) EF ‡‡ ABHG, folglich auch (§. 10.) EF ‡‡ CM.

Da nun überdem (per hyp.) EF ‡‡ CD; so wäre auch (Eb. Geom. §. 96.) CM ‡‡ CD. Welches sich widerspricht, weil beide in C zusammenlaufen.

3) Weil

3) Weil also AB und CD in einerley Ebene liegen, (Nr. 2.) und nicht zusammen laufen können (Nr. 1.); so ist (Ebene Geom. §. 74.) AB ⋕ CD.

§. 23.

Lehrsatz.

Wenn die Schenkel eines Winkels, AEC, den Schenkeln eines andern, in einer andern Ebene liegenden Winkels, BFD, parallel sind; nämlich EA ⋕ FB, und EC ⋕ FD; so sind beide Winkel gleich groß.

Fig. 88.

Beweis. 1) Mache EA = FB, EC = FD; ziehe AB, EF, CD; so ist (Eb. Geom. §. 105. §. 111.) AB = ⋕ EF; und (Ebend.) CD = ⋕ EF; folglich (§. 22) AB = ⋕ CD.

2) Wenn man also AC und BD ziehet; so ist aus eben den Gründen AC = ⋕ BD.

3) Demnach sind die Seiten des Dreyeckes ACE den Seiten des Dreyecks BDF gleich; und es ist (Eb. Geom. §. 46.) AEC = BFD.

§. 24.

Zusatz.

Der Neigungswinkel zweyer sich durchschneidenden Ebenen ist allerwärts einerley, man mag ihn verzeichnen, in welchem Punkte der Durchschnittslinie man will (Eb. Geom. §. 92.).

§. 25.

§. 25.

Lehrsatz.

Wenn eine grade Linie, AB, auf einer Ebene, LM, senkrecht stehet; so ist jede durch AB gelegte Ebene, PQ, auf LM auch senkrecht.

Beweis. Wenn PQ die Ebene LM in der graden Linie PT durchschneidet; so ist (§. 12.) ABP = R; und wenn man überdem in der Ebene LM die grade Linie CB auf PT senkrecht setzet; so ist ebenfalls (§. 12.) ABC = R. Weil nun ABC der Neigungswinkel beider Ebenen ist (§. 20.); so ist PQ auf LM senkrecht (§. 20).

§. 26.

Zusatz.

Zwey Ebenen, AB und EF, die einander in einer graden Linie, ab, durchschneiden, sind auf der Ebene ihres Neigungswinkels, efg, senkrecht. Fig. 86. Denn sie sind beide durch ab gelegt, und ab ist auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht (§. 21.).

§. 27.

Lehrsatz.

Wenn zwey Ebenen, LM und PQ, senkrecht aufeinander sind, und man ziehet in der einen Ebene, LM, eine grade Linie, CB, senkrecht auf die Durchschnittslinie, PT; so ist CB auch senkrecht auf PQ. Fig. 89.

Be-

Beweis. In der Ebene PQ ziehe AB senkrecht auf PT; so ist (§. 20.) CBA ein Neigungswinkel, also (§. 20.) = R. Weil also CBP = R und CBA = R; so ist (§. 13.) CB senkrecht auf PQ.

§. 28.

Lehrsatz.

Fig 89. Wenn eine grade Linie, AB, auf einer Ebene, LM, senkrecht, und eine andre grade Linie, QT, mit AB parallel ist; so ist auch QT auf LM senkrecht.

Beweis. 1) AB und QT liegen (Eb. Geom. §. 74.) in einerley Ebene ABTQ, die auf LM senkrecht ist (§. 25.) und sie in der graden Linie BT schneidet.

Weil nun AB ‡‡ QT, und (§. 12.) ABT = R; so ist (Eb. Geom. §. 94.) QTB = R.

2) Wenn man nun auch die grade Linie DT in der Ebene LM auf BT senkrecht setzet; so ist (§. 20) QTD der Neigungswinkel, also QTD = R, weil BQ auf LM senkrecht ist (§. 20).

3) Da demnach (Nr. 1.) QTB = R, und (Nr. 2.) QTD = R; so ist (§. 13.) QT auf LM senkrecht.

§. 29.

Lehrsatz.

Fig. 89. Zwey grade Linien, AB, SP, die auf einerley Ebene LM senkrecht stehen, sind parallel.

Be-

Beweis. Wenn das nicht wäre; so könnte man durch P irgend eine andere, WP, mit AB parallel ziehen; so wäre auch (§. 28.) WP auf LM senkrecht.

Die Ebene des Winkels WPS schneide nun LM in der graden Linie PB; so ist (§ 12.) WPB = R und SPB = R; welches unmöglich ist (Eb. Geom. §. 14.).

§. 30.

Zusatz.

Aus diesem Beweise erhellet zugleich, daß in einerley Punkte einer Ebene nur Eine grade Linie auf demselben senkrecht stehen kann.

§. 31.

Lehrsatz.

Wen zwey einander schneidende Ebenen, AB und CD, auf einer dritten, LM, senkrecht sind; so ist ihre Durchschnittslinie EF auf LM auch senkrecht.

Beweis. 1) In LM ziehe Fq senkrecht auf die grade Linie AH, worin LM von AB geschnitten wird; so ist Fq senkrecht auf AB (§. 27.) und (§. 12.) EFq = R.

2) Eben so ziehe in LM die Fp senkrecht auf GD, worin LM von CD geschnitten wird; so ist, aus denselben Gründen, EFp = R.

Weil also EFq = R; und EFp = R; so ist (§. 13.) EF auf LM senkrecht.

§. 32.

Aufgabe.

Von einem, außerhalb einer Ebene, LM, gegebenen Punkte, A, einen Perpendikel auf diese Ebene zu fällen.

Auflösung. In LM ziehe willkührlich eine grade Linie CD, und fälle darauf in der Ebene CAD den Perpendikel, AK. Fig. 91. Wenn dieser nicht der verlangte Perpendikel ist; so setze in der Ebene LM, die KB auf CD senkrecht und fälle in der Ebene KAB den Perpendikel AB; so ist dieser der verlangte.

Beweis. In LM ziehe EF ‡‡ CD. Weil nun CKA = R und CKB = R; so ist (§. 13.) CD senkrecht auf der Ebene KAB; folglich (§. 28.) auch EF senkrecht auf KAB. Mithin ist (§. 12.) ABE = R; und, weil auch ABK = R ist; so ist (§. 13.) AB senkrecht auf LM

§. 33.

Aufgabe.

Durch einen, in der Ebene LM gegebnen Punkt, H, einen Perpendikel auf dieser Ebene zu errichten.

Auflösung. Nimm willkührlich einen Punkt, A, außerhalb der Ebene, und fälle einen Perpendikel, AB, (§. 32). Fig. 91. Durch H ziehe GH ‡‡ AB; so ist GH der verlangte Perpendikel.

Beweis. Weil AB auf LM senkrecht, und GH ‡‡ AB ist; so ist auch GH senkrecht auf LM (§. 28.).

§. 34.

Erklärung.

Wenn eine grade Linie, AK, auf einer Ebene schief stehet; so unterscheidet man bey ihr den Neigungswinkel und das Neigungsloth. Wenn man nämlich AB senkrecht herabläßt, und KB ziehet; so ist AKB der Neigungswinkel und AB das Neigungsloth.

§. 35.

Zusatz.

Die Ebene des Neigungswinkels ist allemal auf der Ebene LM senkrecht; weil sie durch das Neigungsloth gelegt ist (§. 25.).

§. 36.

Lehrsatz.

Wenn grade Linien, AK, GP, parallel sind, so sind sie gegen einerley Ebene, LM, unter gleichen Winkeln geneigt. Fig. 91.

Beweis. Fälle die Perpendikel AB und GH (§. 32.) und ziehe KB, und PH. Alsdann ist AB ⧣ GH (§. 29.). Weil nun auch AK ⧣ GP; so ist (§. 23.) KAB = PGH. Da überdem (§. 12.) ABK = R = GHP; so ist (Eb. Geom. §. 85.) AKB = GPH.

§. 37.

Erklärung.

Ebenen sind parallel, wenn sie eine solche Lage haben, daß man sie nach allen Seiten, so weit man will, erweitern kann, ohne daß sie irgend wo zusammenlaufen.

§. 38.

Zusatz.

Wenn eine grade Linie, mn, auf zwey Ebenen, AB und CD, zugleich senkrecht ist, so sind diese Ebenen parallel (§. 19.). Fig. 86.

§. 39.

Lehrsatz.

Wenn zwey Ebenen, LM und OP, parallel sind; so ist jede grade Linie, AB, die auf der einen LM, senkrecht stehet, auch auf der andern, OP, senkrecht. Fig. 92.

Beweis. In OP ziehe durch A willkührlich eine grade Linie AD; so ist allemal BAD = R. Denn wenn die Ebene des Winkels BAD die LM in BF schneidet, so ist (§. 12.) ABF = R. Wenn also nicht auch BAD = R wäre; so würden AD und BF zusammenlaufen (Eb. Geom. §. 94.), folglich auch die gegebenen Ebenen; und sie wären also nicht parallel.

§. 40.

Zusatz.

Hieraus erhellet auch: Wenn zwey parallele Ebenen LM, OP, von einer dritten, BADF, geschnitten werden, so sind ihre Durchschnittslinien, AD und BF, auch parallel.

§. 41.

Lehrsatz.

Wenn die Schenkel zweyer Winkel, GHI, CAD, parallel sind; nämlich HG # AC, HI # AD; so sind auch die Ebenen, LM, OP, worin diese Winkel liegen, einander parallel. Fig. 92.

Beweis. Aus A fälle auf LM den Perpendikel AB (§. 32.) und ziehe BE # HG, BF # HI; so ist auch (§. 22.) BE # AC, und BF # AD. Da nun (§. 12.) ABE = R; so ist auch (Eb. Geom. §. 94.) BAC = R; und weil auch (§. 12.) ABF = R; so ist ebenfalls BAD = R. Folglich (§. 13) ist AB auch auf OP senkrecht, mithin (§. 38.) OP # LM.

§. 42.

Lehrsatz.

Wenn zwey parallele Ebenen, AB und CD, von einer dritten EF, geschnitten werden, so machen sie mit dieser gleiche Neigungswinkel. Fig. 86.

Beweis. 1) Es sey efg der Neigungswinkel der AB gegen EF. Wenn man alsdann die Ebene dieses Winkels erweitert; so muß, weil ab ‡‡ cd ist (§. 40.), ef die cd (Eb. Geom. §. 95.) treffen, und die erweiterte Ebene ehK des Neigungswinkels die CD in einer graden Linie, hK, schneiden.

Da nun (§. 21.) ab auf der Ebene ehK senkrecht, und cd ‡‡ ab ist; so ist (§. 28.) auch cd auf ehK senkrecht. Also ist (§. 12.) ehc = R, und Khc = R; folglich (§. 20.) ehK der Neigungswinkel der CD gegen EF.

2) Da nun (§. 40.) fg = hK: so ist (Eb. Geom. §. 81.) efg = ehK.

43.

Lehrsatz.

Grade Linien, AB, CD, werden von parallelen Ebenen, LM, OP, QR, in proportionale Theile getheilt.

Fig. 93.

Beweis. Ziehe BC, so wird LM in AC und OP in EF von der Ebene ABC geschnitten, und es ist (§. 40.) EF ‡‡ AC. Eben so schneidet die Ebene BCD die QR in BD, und die OP in FG, und es ist FG ‡‡ BD. Demnach ist (Eb. Geom. §. 253.) AE : EB = CF : FB, und CG : GD = CF : FB; folglich AE : EB = CG : GD.

§. 44.
Zusatz.

Also ist auch AE : CG = EB : GD; also auch (Eb. Geom. §. 235.) AE + EB : CG + GD = AE : CG; oder AB : CD = AE : CG; folglich auch, AB : AE = CD = CG.

§. 45.
Lehrsatz.

Wenn zwey Punkte, A und D, einer Ebene, OP, von einer andern Ebene, LM, ungleichweit entfernt sind; so sind diese Ebenen nicht parallel, sondern laufen an der Seite zusammen, wo die kleinere Entfernung liegt. Fig. 92.

Beweis. Man fälle (§. 32.) auf LM die Perpendikel AB und DF; so sind diese die Entfernungen der Punkte A und D von LM. Diese Perpendikel sind parallel (§. 29.) und liegen also in einerley Ebene ABFD, welche die OP in AD und die LM in BF schneidet. Wenn nun etwa DF < AB ist; so laufen AD und BF zusammen, und zwar nach D und F hin verlängert (Eb. Geom. §. 107.), folglich auch an eben der Seite die Ebenen OP und LM.

§. 46.
Zusatz.

Parallele Ebenen sind durchgängig gleich weit von einander entfernt.

§. 47.

Lehrsatz.

Wenn in einer Ebene, OP, drey Punkte, A, C, D, die nicht in grader Linie liegen, von einer andern Ebene, LM, gleich weit entfernt sind; so sind diese beiden Ebenen parallel.

Fig. 92.

Beweis. Weil die Entfernungen AB und DF gleich groß und (§. 29.) parallel sind; so ist ABFD ein Parallelogramm (Eb. Geom. §. 105.) und weil (§. 12.) ABF = R; so ist auch (Eb. Geom. §. 115) BAD = R. Da ferner die Entfernungen AB, CE, auch gleich und parallel sind; so erhellet eben so, daß BAC = R ist.

Folglich ist (§. 13.) AB auf OP senkrecht, also (§. 38.) OP ⧣ LM.

§. 48.

Lehrsatz.

Alle Punkte, A, C, D, m, die von einer Ebene, LM, gleich weit entfernt sind, liegen in einerley Ebene.

Fig. 92.

Beweis. Durch A, C, D kann man (§. 1.) eine Ebene legen, und, wenn man dieselbe erweitert; so muß sie auch durch m gehen. Denn, weil (§. 48.) ACD ⧣ LM ist; so kann ACD nicht unter m, etwa durch o gehen. Sonst wäre sie in o von LM nicht so weit entfernt als m, mithin auch nicht so weit, als A oder C oder D;

D; welches unmöglich ist (§. 46). Eben so wenig kann die Ebene ACD über m etwa durch p gehen. Sonst wäre sie in dem Punkte p weiter von LM entfernt, als m, folglich auch weiter als A und C und D; gegen (§. 46.).

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern.

I.

Von den verschiedenen Körpern, für sich betrachtet.

§. 49.

Erklärung.

Ein **Prisma** ist ein Körper, der von drey oder mehrern Ebenen eingeschlossen wird, die einander in parallelen Durchschnittslinien schneiden, und an den Seiten, wohin diese Linie laufen, von zwey parallelen Ebenen begrenzt werden. Diese letztern parallelen Ebenen heißen die **Grundflächen** des Prisma, und jene andern, die sich in parallelen Ebenen schneiden, die **Seitenflächen** desselben. Ein Prisma wird ein **dreyseitiges**, **vierseitiges**, u. s. f. genannt, je nachdem es drey, oder vier Seitenflächen hat. Wenn die Durchschnittslinen der Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht sind; so ist das Prisma ein **grades**, widrigenfalls ein **schiefes**.

§. 50.

Zusatz 1.

Die Seitenflächen eines jeden Prisma sind Parallelogramme (§. 49. §. 40. Eb. Geom. §. 99.).

§. 51.

Zusatz 2.

Ein Prisma entsteht, wenn man eine ebene Figur nach einer graden Linie so fortrückt, daß sie sich immer parallel bleibt.

§. 52.

Lehrsatz.

Die Grundflächen eines Prisma, AEC und BFD, sind gleiche und ähnliche Figuren.

Fig. 88.

Beweis. 1) Weil die Seitenfläche, ABFE, ein Parallelogramm ist; so ist (Eb. Geom. §. 111.) AE = BF. Eben darum ist EC = FD AC = BD. Folglich ist AE : BF = EC : FD = AC : BD.

2) Weil (§ 40.) AE ⧣ BF, EC = FD; so ist (§. 23.) AEC = BFD. Eben so ist C = D, A = B. Folglich (Eb. G. §. 247.) AEC ≌ BFD.

§. 53.

Zusatz.

Auch jeder Schnitt durch das Prisma, der mit der Grundfläche parallel ist giebt eine der Grundfläche gleiche und ähnliche Figur.

§. 54.

Erklärung.

Ein Prisma wird ein Parallelepipedum genannt, wenn seine Grundflächen, ABCD und EFGH, Parallelogramme sind; und es kann wie jedes Prisma grade und schief (§. 49.) seyn. Wenn es grade ist, und seine Grundflächen Rechtecke sind, so ist es ein rechtwinklichtes Parallelepipedum; sind Grundflächen und Seitenflächen Quadrate, so ist es ein Würfel (Kubus) unter dessen Seitenlinie die Seitenlinie der Grundfläche verstanden wird. Fig. 94.

§. 55.

Lehrsatz.

Bey einem Parallelepipedum sind jede zwey entgegenstehende Seitenflächen, AF und DG, miteinander parallel. Fig. 94.

Beweis. Weil ABCD ein Parallelogramm ist (§. 54.), so ist AB ‡‡ DC. Ueberdem ist AE ‡‡ DH (§. 49). Folglich (§. 41.) AF ‡‡ DG.

§. 56.

Zusatz.

Bey einem Parallelepipedum können also jede zwey gegenüber stehende Seitenflächen als Grundflächen betrachtet werden.

§. 57.

Erklärung.

Ein Cylinder (eine Walze) ist ein Körper, der von zwey gleichen, parallelen Kreisen und einer krummen Fläche eingeschlossen wird, deren sämmtliche Punkte von der graden Linie zwischen den Mittelpunkten jener Kreise gleich weit entfernt sind. Diese grade Linie ist die Axe des Cylinders, die parallelen Kreise sind seine Grundflächen, und jene krumme Fläche heißt die Cylinderfläche. Wenn die Axe auf den Grundflächen senkrecht steht, so ist es ein grader, widrigenfalls ein schiefer Cylinder.

§. 58.

Zusatz 1.

Jeder mit den Grundflächen parallele Schnitt durch den Cylinder giebt einen Kreis, der den Grundflächen gleich ist.

§. 59.

Zusatz 2.

Wenn ein Cirkel nach einer graden Linie so fortrückt, daß er immer mit sich parallel bleibt, so entsteht ein Cylinder.

§. 60.

Lehrsatz.

Ein Schnitt, ACDB, durch die Axe, FE eines Cylinders giebt ein Parallelogramm.

Fig. 95.

Be-

Beweis. Alle Punkte der DB sind von FE gleich weit entfernt (§. 56.). Folglich (Eb. Geom. §. 110. §. 106.) ist DB eine grade Linie und ‡‡ FE. Eben so ist CA ‡‡ FE; folglich (Eb. Geom. §. 96.) DB ‡‡ CA. Da nun auch CD ‡‡ AB ist (§. 40.); so ist ACDB ein Parallelogramm.

§. 61.

Zusatz.

Dieses Parallelogram wird ein Rechteck, wenn der Cylinder grade ist.

§. 62.

Erklärung.

Eine Pyramide ist ein Körper, der begrenzt wird von einer ebenen gradlinichten Figur und mehrern andern Ebenen, welche durch die Seiten der erstern gelegt sind, und einander in graden Linien schneiden, die in Einem Punkte zusammenlaufen. Diese letztern Ebenen heißen Seitenflächen der Pyramide, die graden Linien, worin sie sich schneiden, die Seitenlinien, die erstere Ebene die Grundfläche, und der Punkt, worin die Seitenlinien zusammenlaufen, die Spitze.

§. 63.

Zusatz 1.

Die Seitenflächen einer jeden Pyramide sind Triangel.

§. 64.

Zusatz 2.

Eine Pyramide hat so viele Seitenflächen, als ihre Grundfläche Seiten hat, und sie heißet hiernach dreyseitig, vierseitig u. s. f.

§. 65.

Zusatz 3.

Man setze eine gradlinichte, ebene Figur, ABCDE, und außerhalb derselben einen Punkt, F; ziehe alsdann die graden Linien FA, FB, FC, FD, FE; so schließen die Triangel AFB, BFC, CFD, DFE, EFA mit der Ebene ABCDE eine Pyramide ein.

Fig. 96.

§. 66.

Lehrsatz.

Wenn eine Pyramide von einer Ebene mit der Grundfläche parallel geschnitten wird; so ist die Durchschnittsfigur, abcde, der Grundfläche, ABCDE ähnlich.

Fig. 96.

Beweis. 1) Weil, der Voraussetzung nach, abcde ‡‡ ABCD ist; so ist (§. 40.) ae ‡‡ AE, und ab ‡‡ AB, folglich (§. 23.) eab = EAB. Eben so erhellet, daß auch die übrigen Winkel, der Reihe nach, gleich sind.

2) In dem Triangel AFE ist (S. 1.) ae ‡‡ AE. Folglich (Eb. G. §. 254.) ae : AE = Fa : FA. Eben so ist ab : AB = Fa : FA;

folg-

folglich ae : AE = ab : AB. Aus demselben Grunde sind auch die übrigen Seiten in eben dem Verhältnisse.

Folglich (Eb. Geom. §. 248.) ist abcde ∾ ABCDE.

§. 67.

Lehrsatz.

Wenn eine Pyramide von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so verhalten sich der Durchschnitt und die Grundfläche gegen einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. Fig. 96.

Beweis. Es sey FH senkrecht auf der Grundfläche, mithin auch (§. 39.) auf dem Durchschnitte abcde, in dem Punkte g; so ist FH die Entfernung der Grundfläche, und Fg die Entfernung des Durchschnitts von der Spitze. Die Ebene des Winkels AFH schneide nun die Grundfläche in AH und den Durchschnitt in ag; so ist ag ‡‡ AH (§. 40.) Folglich (Eb. Geom. §. 251.) Fa : FA = Fg : FH.

Nun war (§. 66.) ae : AE = Fa : FA; folglich ist ae : AE = Fg : FH; folglich $ae^2 : AE^2 = Fg^2 : FH^2$; folglich (Ebene Geom. §. 293.) abcde : ABCDE = $Fg^2 : FH^2$.

§. 68.

Erklärung.

Ein Kegel ist ein Körper, der von einem Kreise und einer krummen Fläche begrenzt wird, die

die durch den Umfang jenes Kreises geht und sich in einem Punkte so endigt, daß jede grade Linie aus diesem Punkte in den Umfang des Kreises ganz in derselben zu liegen kömmt. Diese Fläche heißt dann eine Kegelfläche, der Punkt, worin sie sich endigt, die Spitze des Kegels, und der gedachte Kreis, die Grundfläche desselben. Eine grade Linie aus der Spitze in die Peripherie der Grundfläche ist eine Seitenlinie des Kegels, und seine Axe ist die grade Linie aus der Spitze in den Mittelpunkt der Grundfläche. Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, so ist der Kegel ein grader, sonst aber ein schiefer.

§. 69.

Zusatz 1.

Ein Kegel entsteht, wenn ein Triangel um eine von seinen Seiten, die unverrückt bleiben muß, herumgedrehet wird.

§. 70.

Zusatz 2.

Jeder Schnitt durch die Axe eines Kegels giebt einen Triangel; und wenn der Kegel grade ist, so wird dieser Triangel gleichschenklicht.

§. 71.

Lehrsatz.

Wird ein Kegel von einer Ebene mit der Grundfläche parallel geschnitten; so giebt der Durchschnitt einen Kreis,

Fig. 97.

ab,

ab, dessen Mittelpunkt, d, in der Axe, CD, liegt.

Beweis. In dem Umfange der Figur ab nimm irgend einen Punkt, a, und lege (§. 1.) durch a, C, D, eine Ebene, die ab in da, und AB in DA schneidet; so ist da ‡‡ DA (§. 40.); folglich (Eb. Geom. §. 254.) CD : Cd = DA : da; folglich $da = \frac{Cd . DA}{CD}$.

Folglich ist da immer von einerley Größe, man mag den Punkt a im Umfange von ab nehmen, wo man will, weil CD, Cd, DA immer von gleicher Größe bleiben. Folglich ist ab ein Kreis, und d der Mittelpunkt.

§. 72.

Lehrsatz.

Die Grundfläche eines Kegels, AB, und der mit ihr parallele Schnitt, ab, verhalten sich gegeneinander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. Fig. 97.

Beweis. Es sey CF senkrecht auf AB, und (§. 39) in f auch auf ab; so ist CF die Entfernung der Grundfläche von der Spitze und cf die Entfernung des Durchschnitts. Die Ebene des Dreyecks DCF schneide nun die Grundfläche in DF und den Durchschnitt in df; so ist (§. 40.) dF ‡‡ DF; folglich (Eb. Geom. §. 251.) CF : cf = CD : Cd = DA : da (§. 71.); folglich $DA^2 : da^2 = CF^2 : cf^2$; folglich (Eb. Geom. §. 346.) $AB : ab = DA^2 : da^2$.

§. 73.

Erklärung.

Ein abgekürzter Kegel ist der Theil eines Kegels, wie AabB, der zwischen
Fig. 97. der Grundfläche und einer Ebene liegt, die den Kegel mit der Grundfläche parallel schneidet.

§. 74.

Erklärung.

Eine Kugel ist ein Körper, der von einer krummen Fläche begrenzt wird, deren sämmtliche Punkte von einem Punkte innerhalb des Körpers gleich weit entfernt sind. Dieser innere Punkt ist der Mittelpunkt der Kugel; ihr Halbmesser ist die grade Linie vom Mittelpunkte an die Oberfläche; und ihr Durchmesser die grade Linie, die durch den Mittelpunkt, und an beiden Seiten bis an die Oberfläche geht.

§. 75.

Zusatz 1.

Alle Halbmesser einer Kugel sind gleich groß; wie auch alle ihre Durchmesser.

§. 76.

Zusatz 2.

Eine Ebene, welche die Kugel durch den Mittelpunkt schneidet, theilt dieselbe in zwey gleiche Halbkugeln.

§. 77.

Zusatz 3.

Eine Kugel entsteht, wenn ein Halbkreis um seinen unverrückten Diameter gedreht wird.

§. 78.

Lehrsatz.

Wenn eine Ebene die Kugel durch den Mittelpunkt schneidet, so giebt 1) dieser Schnitt einen Kreis; AB, und 2) dieser Kreis hat mit der Kugel einerley Mittelpunkt und Halbmesser. Fig. 98.

Beweis. In dem Umfange der Ebene AB nimm willkührlich mehrere Punkte, D, E, und ziehe die graden Linien CD, CE; so sind diese allemal gleich groß; (§. 75.). Folglich ist AB ein Kreis, C der Mittelpunkt und CD der Halbmesser desselben.

§. 79.

Zusatz.

Alle Kugelschnitte durch den Mittelpunkt geben gleich große Kreise (§. 78. Nr. 2.).

§. 80.

Lehrsatz.

Jeder Kugelschnitt, GH, ist ein Kreis, und sein Mittelpunkt ist derjenige Punkt, F, den der Perpendikel, CF, trifft, Fig. 98.

der aus dem Mittelpunkte der Kugel auf den Durchschnitt gefället wird.

Beweis. Der Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel muß, wie CF, die Durchschnittsebene innerhalb der Kugel treffen, weil jede grade Linie, die von C bis in die Oberfläche der Kugel, oder aus derselben herausginge, grösser als CF wäre (§. 15.).

Von F ziehe willkührlich mehrere grade Linien in den Umfang von GH, etwa FG und FH; so sind dieselben allemal gleich groß. Denn, wenn man noch CG, CH ziehet; so ist (Eb. G. §. 309.) $FG = \sqrt{(CG^2 - CF^2)}$ und $FH = \sqrt{(CH^2 - FH^2)}$. Da nun allemal $CG = CH$ (§. 75.) und $CF = CF$; so ist auch allemal $FG = FH$. Folglich ist GH ein Kreis und F sein Mittelpunkt.

§. 81.

Zusatz 1.

Weil CG immer einerley bleibt (§. 75.), so wird $\sqrt{(CG^2 - CF^2)}$, also auch FG um so kleiner, je größer CF wird; das ist, ein Kugelschnitt ist um so kleiner, je weiter er vom Mittelpunkte der Kugel entfernt ist.

Fig. 98.

§. 82.

Zusatz 2.

Je kleiner aber die Entfernung, CF, wird, desto größer wird FG, also auch der Durchschnitt GH;

GH; und er wird am allergrößten, wenn CF verschwindet, das ist, wenn der Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Daher heißen auch die Schnitte, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, **größte Kreise** derselben; und alle andere **kleinere Kreise**. Fig. 98.

§. 83.

Zusatz 3.

Je kleiner ein Kugelschnitt GH, ist, desto weiter ist er vom Mittelpunkte der Kugel entfernt. Denn es ist $FG = \sqrt{(CG^2 - CF^2)}$. Je kleiner also FG werden soll, desto größer muß CF werden, weil CG immer einerlei bleibt. Fig. 98.

§. 84.

Zusatz 4.

Schnitte einer Kugel, die vom Mittelpunkte derselben, gleich weit entfernt sind, sind gleich groß; und gleich große Schnitte einer Kugel sind von Mittelpunkte derselben gleich weit entfernt.

§. 85.

Zusatz 5.

Wenn ein Halbmesser der Kugel durch den Mittelpunkt eines kleinern Kreises geht; so stehet er auf diesem senkrecht. Sonst könnte man aus dem Mittelpunkte der Kugel eine andre grade Li-

nie senkrecht ziehen, die nicht in des Kreises Mittelpunkt ginge; gegen §. 80. Bew.

§. 86.

Zusatz 6.

Wenn man aus dem Mittelpunkte, F, eines kleinern Kreises, GH, einen Perpendikel errichtet, so gehet er durch den Mittelpunkt der Kugel. Ginge er, wie FK, nicht dadurch, so könnte man FC ziehen. Diese wäre (§. 85.) auch ein Perpendikel, gegen §. 18.

Fig. 98.

II.

Vergleichung der Körper untereinander.

§. 87.

Erklärung.

Die Höhe eines Körpers, der eine ebene Grundfläche hat, ist die Entfernung seiner Grundfläche von seiner äußersten Grenze.

§. 88.

Grundsatz.

Körper sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen haben, und alle gleich hohen, mit den Grundflächen parallele Schnitte durch dieselben, gleich groß sind.

§. 89.

Lehrsatz.

Prismen und Cylinder, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind gleich groß.

Beweis. Alle gleich hohen und mit den Grundflächen parallelen Schnitte durch dieselben sind gleich groß; weil sie den Grundflächen gleich sind (§. 53. §. 58.).

§. 90.

Lehrsatz.

Pyramiden und Kegel, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind gleich groß.

Beweis. Nimm zwey Körper dieser Art, (Fig. 96. 97.), mit gleichen Grundflächen, EC = AB, und gleichen Höhen, FH = CF. Schneide sie mit den Grundflächen parallel, so daß die Durchschnitte, ec und ab, gleiche Höhe haben, gH = fF; so ist auch Fg = Cf.

Nun ist (§. 67. §. 72.) $ec = \frac{Fg^2 . EC}{FH^2}$, und $ab = \frac{Cf^2 . AB}{CF^2}$; folglich, weil Fg = Cf, EC = AB, FH = CF, so ist ec = ab.

Weil also alle gleich hohen, mit den Grundflächen parallele Schnitte einander gleich sind, so sind die Körper gleich groß.

§. 91.

Lehrsatz.

Ein grades, dreyseitiges Prisma, ABCDEF, Fig. 99. ist dreimal so groß, als eine Pyramide, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. In der Seitenfläche ABCD ziehe die Diagonale EA, und in der Seitenfläche BCFE die Diagonale EC; so schneidet die Ebene des Triangels AEC die Pyramide ABCE ab; und diese hat mit dem Prisma einerley Grundfläche, ABC und einerley Höhe, EB.

Ziehe ferner in der Seitenfläche ACFD die Diagonale CD; so schneidet die Ebene des Triangels DCE die Pyramide DEFC ab. Diese hat ebenfalls mit dem Prisma einerlei Grundfläche, DEF, und einerley Höhe, FC.

Beide Pyramiden sind also (§. 90.) gleich groß.

Der noch übrige Körper, ADEC, ist auch eine Pyramide; und, wenn man ADE als seine Grundfläche betrachtet, so ist C die Spitze. Nimmt man alsdann bei der ersten Pyramide ABCE die Fläche ABE als Grundfläche an, so ist C ebenfalls die Spitze derselben. Da alsdann beide Pyramiden gleiche Grundflächen haben, ADE = ABE (§. 50. Eb. Geom. §. 113.), und überdem auch gleiche Höhen, indem ihre Grundflächen in einerley Ebene liegen und ihre

Spitzen zusammen fallen; so sind sie auch beide gleich groß.

Also ist das Prisma ABCDEF so groß, als drey Pyramiden, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe haben.

§. 92.

Zusatz.

Weil (§. 89. §. 90.) alle Prismen und Cylinder, imgleichen alle Pyramiden und Kegel, auch gleicher Grundfläche und in gleicher Höhe gleich groß sind; so ist überhaupt ein Prisma oder Cylinder dreymal so groß, als eine Pyramide oder Kegel, wenn Grundflächen und Höhen gleich sind.

§. 93.

Lehrsatz.

Rechtwinklichte gleich hohe Parallelepipeda, AK und LM, verhalten sich, wie ihre Grundflächen, AP : LM. Fig. 100.

Beweis. 1) Erweitere das Parallelpipedum, AK, bis die Grundfläche IC = LM wird (Eb. G. §. 286. §. 257.). Alsdann ist Parallelepipedum IG = Parallelepipedo LN (§. 89.).

2) Die Grundfläche AC theile durch grade Linien, die mit AD parallel sind, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. Durch jede Theilungslinie lege eine Ebene mit AH parallel. Alsdann wird das Parallelepipedum AG in eben so viel

 gleiche

gleiche Theile getheilt (§. 89.), als die Grundfläche AC.

3) So viele von den gedachten Theilen der Grundfläche AC in AP zu liegen kommen, eben so viele Theile des Parallelepipedi AG fallen in AK.

Folglich ist (Eb. Geom. §. 231.) AG : AK = AC : AP.

Folglich auch AG — AK : AK = AC — AP : AP (Eb. Geom. §. 234.), das ist, IG : AK = IC : AP; Folglich (Nr. 1.) LN : AK = LM : AP.

§. 94.

Zusatz.

Eben diese Regel gilt für alle Prismen und Cylinder (§. 89.), folglich auch (§. 92.) für alle Pyramiden und Kegel.

§. 95.

Lehrsatz.

Fig. 100. Rechtwinklichte Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Ueber dem Rechteck IK errichte das rechtwinklichte Parallelepipedum IH, und über derselben Grundfläche auch das rechtwinklichte Parallelepipedum IG. Alsdann ist IA die Höhe des erstern und IB die Höhe des andern.

Nun

Nun nehme man ID als Grundfläche des erstern und IC als Grundfläche des andern an; so ist IQ die gemeinschaftliche Höhe beider.

Folglich (§. 94.) Parallelepipedum IH : Parallelepipedo IG = ID : IC = IA : IB (Eb. Geo. §. 285.)

§. 96.

Zusatz.

Mithin verhalten sich alle Prismen oder Cylinder, oder Pyramiden oder Kegel, wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich sind; welches, wie §. 94. erhellet.

§. 97.

Lehrsatz.

Prismen oder Cylinder oder Pyramiden oder Kegel sind im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweis. Man setze ein Prisma, P, mit der Grundfläche b und der Höhe a; und ein andres, Π, mit der Grundfläche β und der Höhe α; so kannn man sich noch ein drittes, Q, denken, dessen Grundfläche $= \beta$ und dessen Höhe $= a$ ist.

Alsdann ist (§. 94.)

$P : Q = b : \beta$; und (§. 96.)

$Q : \Pi = a : \alpha$.

Folglich $P : \Pi = \left\{ \begin{matrix} b : \beta \\ a : \alpha \end{matrix} \right\}$ (Eb. Geom. §. 240. §. 241.).

 Daß

Daß eben dieß auch für Cylinder, Pyramiden und Kegel gelte, ist aus §. 94. und §. 96. klar.

§. 98.

Zusatz 1.

Weil $P:\Pi = \left\{ \begin{matrix} b:\beta \\ a:\alpha \end{matrix} \right\}$ so ist auch (Eb. Geom. §. 243.) $P:\Pi = b\beta : a\alpha$; oder, Prismen, Cylinder, Pyramiden und Kegel verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Grundflächen in die Höhen.

§. 99.

Zusatz 2.

Da die Grundflächen der Würfel Quadrate, also im verdoppelten Verhältnisse der Seitenlinien sind (Eb. Geom. §. 287.) und überdem die Höhe mit diesen Seitenlinien auch einerlei ist; so sind Würfel im verdreifachten Verhältnisse ihrer Seitenlinien (Eb. Geom. §. 242.).

§. 100.

Lehrsatz.

Eine Halbkugel, ABE, beträgt zwei Drittheile eines Cylinders, HIKL, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat, HI = AB, und PO = FE.

Fig. 101.

Beweis. 1) Ueber der Grundfläche LK denke man sich einen graden Kegel, dessen Spitze in P liege; so ist dieser Kegel = $\frac{1}{3}$ Cylinder (§. 92.); folglich

folglich der übrigbleibende Körper HLPKI = $\frac{2}{3}$ Cylinder. Die Halbkugel aber ist diesem Körper gleich.

2) Man schneide den besagten Körper und die Halbkugel, mit den Grundflächen parallel, in gleicher Höhe, PQ = FG; so ist der Kreis CD allemal so groß als die Durchschnittsfigur des erstern Körpers, die ein Ring ist, der zwischen den Kreisen MN und RS liegt.

Nämlich Kreis CD = $\pi \cdot GC^2$ (Eb. Geom. §. 344.) = $\pi \cdot (FC^2 - FG^2)$, (Eb. Geom. §. 144.).

Weil ferner QR ⧣ OL; so ist PQ : QR = PO : OL (Eb. Geom. §. 255.). Da nun die Höhe des Cylinders, und der Halbmesser seiner Grundfläche dem Halbmesser der Kugel gleich sind; so ist OL = PO, mithin QR = PQ; folglich auch QR = FG.

Nun ist aber der Ring RMNS = $\pi \cdot (QM^2 - QR^2) = \pi \cdot (FC^2 - FG^2)$ = dem Kreise CD.

3) Folglich ist die Halbkugel = dem Körper HLPKI = $\frac{2}{3}$ Cylinder (§. 88.).

§. 101.

Zusatz 1.

Die ganze Kugel betrüge $\frac{4}{3}$ dieses Cylinders, oder $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, dessen Grundfläche ihrem größten Kreise, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

§. 102.
Zusatz 2.

Eine Halbkugel ist doppelt so groß als ein Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 103.
Erklärung.

Ein Kubikfuß ist ein Würfel, dessen Seitenlinie einen Fuß lang ist. Hieraus versteht man, was eine Kubikruthe, ein Kubikzoll, eine Kubiklinie, ein Kubikskrupel sagen wollen.

§. 104.
Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Prisma oder eines Cylinders im Kubikmaaß zu finden.

Auflösung. Nimm die Grundfläche in einem beliebigen Quadratmaaße und die Höhe in einem Längenmaaße von eben dem Namen und multiplicire beides ineinander; so zeigt das herauskommende Produkt den Inhalt des Körpers in gleichnamigen Kubikmaaße an.

Fig. 99.

Beweis. Wenn das Prisma AF mit der Grundfläche ABC in der Höhe BE gegeben ist, und die letztern in einem beliebigen, gleichnamigen Maaße gemessen sind; so mache ein Kubikmaaß, K, eben des Namens, mit der Seitenlinie L die also $= 1$ ist. Die Grundfläche von K ist alsdann $= L^2$ und die Höhe $= L$.

Nun

Nun ist (§. 98.) $AF : K = ABC \times BE : L^2 \times L = ABC \times BE : 1$. Also das Kubikmaaß K ist in dem Prisma AF so vielmal enthalten, als Eins in dem vorbesagten Produkte aus der Grundfläche in die Höhe des Prisma.

Daß eben dieses für den Cylinder gelte, ist aus §. 89. klar.

§. 105.

Zusatz 1.

Der körperliche Inhalt eines Kegels oder einer Pyramide wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe in einem gleichnamigen Maaße mißt, beides ineinander multiplicirt, und von dem Produkte den dritten Theil nimmt (§. 92.).

§. 106.

Zusatz 2.

Den Inhalt eines Würfels giebt die Kubikzahl von der Zahl, welche die Länge der Seitenlinie anzeigt.

§. 107.

Zusatz 3.

Mit Hülfe des 101sten §. kann auch der körperliche Inhalt einer Kugel leicht gefunden werden. Wenn ihr Durchmesser = d ist, so ist (§. Eb. G. §. 344.) ihr größter Kreis $= \frac{1}{4} \pi d^2$. Sie ist also (§. 101.) $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Grundfläche $= \frac{1}{4} \pi d^2$ und dessen Höhe = d ist. Nun ist

ist der Inhalt dieses Cylinders $= \frac{1}{4} \pi d^3$; also der Inhalt der Kugel $= \frac{2}{3} . \frac{1}{4} \pi d^3 = \frac{1}{6} \pi d^3$.

§. 108.

Zusatz 4.

Setzet man den Halbmesser r anstatt d, so bekömmt man den Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} \pi r^3$.

§. 109.

Zusatz 5.

Wenn man die eine Kugel g nennt, und eine andere mit dem Halbmesser R durch G bezeichnet; so ist $g : G = \frac{4}{3} \pi r^3 : \frac{4}{3} \pi R^3 = r^3 : R^3$, oder, Kugeln verhalten sich, wie die Würfel ihrer Halbmesser, folglich auch, wie die Würfel ihrer Durchmesser.

§. 110.

Zusatz 6.

Wenn der körperliche Inhalt, A, einer Kugel gegeben ist, so findet man daraus leicht ihren Durchmesser oder Halbmesser. Denn es ist A, $= \frac{1}{6} \pi d^3$, wenn d den Durchmesser bedeutet. Folglich $\frac{6A}{\pi} = d^3$, folglich $\sqrt[3]{\frac{6A}{\pi}} = d$.

§. 111.

Zusatz 7.

Wenn man den Inhalt eines gegebnen Körpers gefunden hat, und aus der Zahl, welche ihn

ihn ausdrückt, die Kubikwurzel nimmt, so hat man die Seite eines Würfels, der dem gegebnen Körper gleich ist, und zwar in einem Längenmaaße, das mit dem gebrauchten Kubikmaaße gleichnamig ist.

Dritter Abschnitt.

Von der Oberfläche der Körper.

---

§. 112.

Anmerkung.

Wenn die Oberfläche eines Körpers aus ebenen Flächen besteht; so gehört die Betrachtung derselben in die ebene Geometrie. Dies ist der Fall bei dem Prisma und der Pyramide.

§. 113.

Lehrsatz.

Die krumme Oberfläche eines Cylinders ist einem Rechtecke gleich, das eben so hoch ist als der Cylinder und die Grundlinie so groß ist als die Peripherie der Grundfläche desselben. Fig. 101.

Beweis. Die Höhe des Rechteckes, TX, lege an die gleiche Höhe des Cylinders, IK; so läßt sich der Cylinder in das Rechteck einwickeln. Ist nun TV so lang als die Peripherie der Grundfläche HI; so reicht das Rechteck grade um den Cylin-

Cylinder herum; oder, es passet auf die krumme Oberfläche des Cylinders. Diese ist ihm also gleich.

§. 114.

Lehrsatz.

Wenn grade Cylinder gleich hoch sind; so verhalten sich ihre krummen Oberflächen S und s, wie die Halbmesser ihrer Grundflächen.

Beweis. S und s verhalten sich, wie die Rechtecke, deren Höhen den Höhen der Cylinder, und deren Grundlinien den Peripherien der Grundflächen derselben gleich sind (§. 113.); folglich auch (Eb. Geom. §. 285.) wie die Grundlinie dieser Rechtecke, folglich auch wie die Peripherien von den Grundflächen der Cylinder, folglich auch (Eb. Geom. §. 327.) wie die Halbmesser dieser Grundflächen.

§. 115.

Zusatz.

Die krummen Oberflächen grader Cylinder verhalten sich überhaupt, wie die Produkte aus ihren Höhen in die Peripherien der Grundflächen (Eb. Geom. §. 285.).

§. 116.

Lehrsatz.

Die krumme Oberfläche eines graden Kegels ist einem Kreisausschnitte gleich, dessen Halbmesser der Seitenlinie des Kegels, und

Fig. 102.

und dessen Bogen der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist.

Beweis. Es sey ED = BC. Alsdann kann man ED auf BC auflegen und den Kegel in den Sektor einwickeln. Wenn nun DF so lang ist, als die Peripherie der Grundfläche AC; so reichet der Sektor grade um den Kegel herum; oder, er passet auf die krumme Oberfläche des Kegels. Diese ist ihm also gleich.

§. 117.

Zusatz.

Demnach (Eb. G. §. 349.) ist die krumme Oberfläche des graden Kegels auch einem Triangel gleich, dessen Höhe der Seitenlinie des Kegels und dessen Grundlinie der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist.

§. 118.

Zusatz.

Die krummen Oberflächen grader Kegel verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Seitenlinien in die Peripherien ihrer Grundflächen (Eb. Geom. §. 284.).

§. 119.

Lehrsatz.

Die krumme Oberfläche, S, eines graden Cylinders verhält sich zur Grundfläche, B, wie die doppelte Höhe des Cylinders zum Halbmesser seiner Grundfläche.

Beweis. S ist so groß, als ein Triangel, dessen Grundlinie der Peripherie von B, und dessen Höhe der doppelten Höhe des Cylinders gleich ist (§. 113. Eb. Geom. §. 138.). B aber ist so groß als ein Triangel, dessen Grundlinie ebenfalls der Peripherie von B, und dessen Höhe dem Halbmesser von B gleich ist (E. G. §. 341.). Nun verhalten sich die erwähnten Triangel, wie ihre Höhen (Eb. Geom. §. 282.); also S verhält sich zu B, wie die doppelte Höhe des Cylinders zum Halbmesser seiner Grundfläche.

§. 120.

Lehrsatz.

Die krumme Oberfläche, S, eines graden Kegels verhält sich zu seiner Grundfläche, B, wie seine Seitenlinie zum Halbmesser der Grundfläche.

Beweis. S ist einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß ist, als die Peripherie von B, und dessen Höhe so groß ist, als die Seite des Kegels (§. 117.); und B ist einem Triangel gleich, dessen Grundlinie ebenfalls so groß ist, als die Peripherie von B, und dessen Höhe so groß ist, als der Halbmesser von B (Eb. Geom. §. 341.). Nun verhalten sich die besagten Triangel, wie ihre Höhen (Eb. Geom. §. 282.). Also die Fläche des Kegels verhält sich zu seiner Grundfläche, wie seine Seitenlinie zum Halbmesser seiner Grundfläche.

§. 121.

Lehrsatz.

Die Oberfläche, S, einer Kugel ist viermal so groß, als ihr größter Kreis.

Beweis. Wenn r der Halbmesser der Kugel ist; so ist ihr größter Kreis $= \pi r^2$ (Eb. G. §. 344.).

Nun denke man sich die Oberfläche der Kugel in so viele kleine Kreise getheilt, daß dieselben als Ebenen betrachtet werden können; und über jedem dieser Kreise stehe ein grader Kegel, der seine Spitze im Mittelpunkte der Kugel habe. Die Höhe dieser Kegel ist also $= r$, und ihre Grundflächen sind zusammen $= S$. Folglich (§. 105.) ist der körperliche Inhalt aller dieser Kegel $= \frac{r \cdot S}{3}$. Weil nun alle diese Kegel zusammen; die Kugel ausmachen; so ist (§. 107. 108.) $\frac{r \cdot S}{3} = \frac{4 \pi r^3}{3}$; folglich $S = \frac{4 \pi r^3}{3} : \frac{r}{3} = 4 \pi r^2$.

Anmerkung.

Die hier gewählte Art, den vorstehenden Satz zu beweisen, ist freilich den Forderungen einer strengen synthetischen Methode nicht gemäß. Aber die unumgänglich nöthige Kürze wird ihn entschuldigen.

§. 122.

Zusatz 1.

Setzet man einen Cylinder, dessen Grundfläche $= \pi r^2$ und dessen Höhe $= 2r$ ist; so ist, weil die Peripherie der Grundfläche alsdann $= 2\pi r$ ist, die krumme Oberfläche des Cylinders $= 4\pi r^2$ (§. 63.). Folglich ist die Oberfläche einer Kugel so groß, als die krumme Oberfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche dem größten Kreise der Kugel, und dessen Höhe ihrem Durchmesser gleich ist.

§. 123.

Zusatz 2.

Wenn die Oberfläche, S, einer Kugel gegeben ist; so findet man daraus leicht ihren Halbmesser, mithin auch ihren körperlichen Inhalt. Denn, weil $S = 4\pi r^2$; so ist $\frac{S}{4\pi} = r^2$; also $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.

§. 124.

Zusatz 3.

Wenn P die Oberfläche einer andern Kugel bedeutet, deren Halbmesser $= R$ ist; so ist $P = 4\pi R^2$. Also $S : P = 4\pi r^2 : 4\pi R^2 = r^2 : R^2$; oder die Oberflächen der Kugeln verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Halbmesser; mithin auch, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Viertes

Viertes Buch.
Die ebene Trigonometrie.

§. 1.
Erklärung.

Die ebene Trigonometrie; oder, die Wissenschaft von der Berechnung ebener Triangel, lehrt, wie man aus drey gegebnen Stücken von dem Umfange eines ebenen Triangels, worunter aber wenigstens eine Seite seyn muß, die übrigen finden kann.

§. 2.
Erklärung.

Man nehme einen spitzen Winkel ACB, und seine Ergänzung zu 180°, BCH. Man setze ferner CE auf CA senkrecht und verzeichne aus dem Mittelpunkte C einen Kreis mit einem willkührlichen Halbmesser, CA = CB = CE. Aus B fallen BD und BQ auf CA und CE senkrecht. Durch A und E ziehe man Tangenten, die den verlängerten Schenkel CB im F und G schneiden. Fig. 103.

Es heißet nun
BD der Sinus
DA der Queersinus (Sinus versus)
AF die Tangente
CF die Sekante;

und diese Linien werden sowol dem Winkel ACB, als auch dem Bogen AB zugeschrieben.

Eben so ist BQ der Sinus, QE der Queersinus, EG die Tangente und CG die Sekante des Winkels BCE und des Bogens BE.

Da der Winkel BCE, der den Winkel ACB zu 90° ergänzt, und da also auch die vier letztern Linien von der Größe des Winkels ACB abhängen; so betrachtet man dieselben auch als zu ihm gehörig. Dann heißt

BQ der Cosinus
QE der Cosinus versus
EG die Cotangente
CG die Cosekante

des Winkels ACB, und des Bogens AB.

Alle Linien übrigens, die in diesem § erwähnt sind, werden **trigonometrische Linien** genannt.

§. 3.
Zusatz 1.

Wenn der Winkel ACB wächst; so wachsen auch Sinus, Queersinus, Tangente und Sekante. Der Cosinus dagegen, der Cosinus versus, die Cotangente und Cosekante nehmen ab.

§. 4.
Zusatz 2.

Nach diesem Gesetze gehet es fort, bis B in E fällt und der Winkel ACB also ein rechter

wird. Alsdann wird der Sinus BD dem Halbmesser EC gleich und der Queersinus DA dem Halbmesser CA. Tangente und Sekante sind alsdann, weil sie beide auf CA senkrecht stehen, unter sich parallel. Es giebt also keinen Punkt, wo sie zusammenlaufen; sondern, so weit sie auch fortgezogen seyn mögen, so können sie doch immer noch verlängert werden. Sie sind folglich größer, als jede gegebne Linie, oder, unendlich groß.

§. 5.

Zusatz 3.

Der Cosinus BQ, der Cosinus versus QE, und die Cotangente EG verschwinden, wenn B in E fällt, oder, wenn der Winkel ein rechter wird. Die Cosekante CG aber wird dem Halbmesser CE gleich.

§. 6.

Zusatz 4.

Wenn der Winkel noch wächst, und so ein stumpfer Winkel ACI entsteht; so nimmt der Sinus IL wieder ab. Da also der Sinus nie größer wird als der Halbmesser; so wird deshalb der Halbmesser auch der **Sinus totus** genannt. Der Queersinus LA dagegen wächst mit dem stumpfen Winkel.

§. 7.

Zusatz 5.

Die Tangente AM und die Sekannte CM des stumpfen Winkels ACI haben eine der vori-

gen entgegengesetzte Lage, und nehmen ab, wie der stumpfe Winkel zunimmt.

§. 8.

Zusatz. 6.

Der Cosinus versus QE, der Cosinus IQ, die Cotangente EK und die Cosekante CK wachsen mit dem stumpfen Winkel. Auch haben die drey letztern Linien eine Lage, die der vorigen entgegengesetzt ist.

§. 9.

Zusatz 7.

Wenn endlich B in H fällt, oder Winkel und Bogen = 180° werden; so verschwindet der Sinus IL, der Queersinus HA wird dem doppelten Halbmesser gleich. Die Tangente AM verschwindet und die Sekante CM wird dem Halbmesser gleich.

Der Cosinus IQ und der Cosinus versus QE werden dem Halbmesser gleich; die Cotangente EK und die Cosekante CK aber werden unendlich groß.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn zwey Winkel, ACB und ACI, einander zu 180° ergänzen; so haben sie gleich große trigonometrische Linien, den einzigen Queersinus ausgenommen; welcher bei beiden um den doppelten Cosinus verschieden ist.

Fig. 103.

Be-

Beweis. 1) Weil ACB + ACI = 180°, und ICH + ACI ebenfalls = 180° ist; so ist ACB = ICH = ACM. Auch ist BCE = R — ACB, und ECI = R — ICH, also BCE = ECI.

2) In den Dreyecken DBC und LIC ist CB = CI, BCD = ICL (Nr. 1.) und BDC = R = ILC. Folglich (Eb. G. §. 89.) BD = IL. Also ist sin. ACB = sin. ACI.

3) Aus eben den Gründen (Eb. G. §. 89.) ist DC = CL; folglich (Eb. G. §. 111.) BQ = IQ. Das ist, cos. ACB = cos. ACI.

4) Weil CA = CA, CAF = R = CAM, und (Nr. 1.) ACF = ACM; so ist AF = AM, und CF = CM. Also tang. ACB = tang. ACI und sec. ACB = sec. ACI.

5) Weil CE = CE, GCE = ECK (Nr. 1.) und CEG = R = CEK; so ist EG = EK und CG = CK, oder, cot. ACB = cot. ACI, und cos. ACB = cos. ACF.

6) Der cos. vers. QE ist für beide Winkel einerley.

7) Der Queersinus LA des Winkels ACI übertrifft den Queersinus DA des Winkels ACB um DC + CL, das ist, um den doppelten Cosinus.

§. 11.

Lehrsatz.

Wenn die Winkel ACB und acb einander gleich, ihre Bogen aber mit ungleichen Halbmessern

messern beschrieben sind; so verhalten sich ihre trigonometrischen Linien, die einerley Namen haben, allemal wie die Halbmesser der Bogen.

Beweis. 1) Weil $\Delta DBC \backsim \Delta dbc$ (Eb. G. §. 261.); so ist $BD:bd = CB:cb$; oder, die Sinus verhalten sich, wie die Halbmesser.

2) Aus eben dem Grunde ist $DC:dc = CB$ cb, oder (Eb. G. §. 111.) $BQ:bq = CB:cb$; das ist, die Cosinus verhalten sich, wie die Halbmesser.

3) Weil (Eb. Geom. §. 261.) $\Delta AFC \backsim \Delta afc$; so ist $AF:af = CA:ca$; also, die Tangenten verhalten sich, wie die Halbmesser.

4) Aus eben dem Grunde hat man $CF:cf = CA:ca$; oder, die Sekanten verhalten sich, wie die Halbmesser.

5) Ist (Eb. Geom. §. 261.) $\Delta GCE \backsim \Delta gce$; also $EG:eg = CE:ce$, also die Cotangenten verhalten sich, wie die Halbmesser.

6) Eben daher ist $CG:cg = CE:ce$; oder, die Cosekanten verhalten sich, wie die Halbmesser.

7) Weil (Nr. 2.) DC und dc sich verhalten, wie die Halbmesser; so hat man $CA:ca = DC:dc$; oder, $CA:DC = ca:dc$; folglich (Eb. G. §. 234.) $CA - DC:DC = ca - dc:dc$; oder, $DA:DC = da:dc$; also $DA:da = DC:dc$; das ist, die Queersinus verhalten sich, wie die Cosinus, oder (Nr. 2.) wie die Halbmesser.

8)

8) Für die Cosinus versus erhellet es eben so.

9) Für die trigonometrischen Linien der stumpfen Winkel, wenn man den Queersinus ausnimmt, ist der Satz daraus klar, daß diese Winkel mit den Spitzen, die sie zu 180° ergänzen, einerley trigonometrische Linien haben, den einzigen Queersinus ausgenommen (§. 10.).

10) Was die Queersinus LA und la stumpfer Winkel anlangt; so hat man (Nr. 2. und §. 10.) CA : ca = LC : lc, also (Eb. Geom. §. 235.) CA + LC : ca + lc = CA : ca; das ist, die Queersinus LA und la verhalten sich, wie die Halbmesser.

§. 12.

Zusatz 1.

Wenn daher die trigonometrischen Linien eines Winkels für den Halbmesser = 1 bekannt sind; so kann man sie leicht für jeden andern Halbmesser finden.

Man setze CA = 1 und ca = r; so ist

1) 1 : r = sin. ACB : sin. acb; also sin. acb = r × sin. ACB.

2) 1 : r = sin. vers. ACB : sin. vers. acb; also sin. vers. acb = r × sin. vers. ACB.

3) 1 : r = tang. ACB : tang. acb; also tang. acb = r × tang. ACB.

4) 1 : r = sec. ACB : sec. acb; folglich sec. acb = r × sec. ACB.

5)

5) 1 : r = cos. ACB : cos acb; folglich cos. acb = r × cos. ACB.

6) 1 : r = cos. vers. ACB : cos. vers. acb; also cos. vers. acb = r × cos. vers. ACB.

7) 1 : r = cot. ACB : cot. acb; folglich cot. acb = r × cot. ACB.

8) 1 : r = cosec. ACB : cosec. acb; folglich cosec. acb = r × cosec. ACB.

§. 13.

Zusatz 2.

Auch stehen die trigonometrischen Linien eines Winkels ACB unter sich in eben dem Verhältnisse, als bei einem gleichen Winkel, acb, dessen Bogen aber mit einem andern Halbmesser verzeichnet ist. So ist z. B. sin. ACB : sin. acb = tang. ACB : tang. acb (weil beide Verhältnisse = 1 : r sind); folglich, sin. ACB : tang. ACB = sin. acb : tang. acb.

§. 14.

Aufgabe.

Der Halbmesser ist = 1, man soll den Sinus eines Winkels finden.

Auflösung und Beweis. 1) Der Sinus, BD, eines Winkels oder Bogens ist allemal die Hälfte von der Sehne BN eines nochmal so großen Bogens. Nun findet man aus §. 195

und §. 313. der ebenen Geometrie die Sehnen für die Bogen von 60°, 30°, 15°, $7^\circ 30'$, $3^\circ 45'$, $1^\circ 52\frac{1}{2}'$, $56\frac{1}{4}'$, $28\frac{1}{8}'$. Wenn man diese Sehnen halbirt; so hat man die Sinus für die Bogen oder Winkel, von 30°, 15°, $7^\circ 30'$, $3^\circ 45'$, $1^\circ 52\frac{1}{2}'$, $56\frac{1}{4}'$, $28\frac{1}{8}'$, $14\frac{1}{16}'$.

2) Wenn man (Eb. Geom. §. 312.) die zu dem Bogen von $28\frac{1}{8}'$ gehörige äußere Polygonseite sucht und sie halb nimmt; so hat man die Tangente des Winkels von $14\frac{1}{16}'$; bei welcher Rechnung sich dann findet:

$$\text{sin. } 14\tfrac{1}{16}' = 0{,}0040906$$
$$\text{tang. } 14\tfrac{1}{16}' = 0{,}00409065.$$

Daraus erhellet: Wenn ein Winkel kleiner ist als $14\frac{1}{16}'$; so sind Sinus und Tangente nicht mehr um $\frac{1}{10000000}$ verschieden.

Um so weniger kann alsdann der Bogen von dem Sinus oder der Tangente um $\frac{1}{10000000}$ verschieden seyn. Also ist in den ersten 7 Decimalstellen der Bogen von $14\frac{1}{16}' = 0{,}0040906$.

3) Weil sich nun die Länge der Bogen verhält, wie die Anzahl ihrer Grade; so hat man:

$$14\tfrac{1}{16}' : 1' = 0{,}0040906 : \text{Länge des Bogens von } 1';$$

oder:

$$14\tfrac{1}{16}' : 1' = 0{,}0040906 : \text{sin. } 1';$$

und man findet:

$$\text{sin. } 1' = 0{,}0002908.$$

4) Wenn der Sinus BD bekannt ist; so hat
Fig. 105. man auch den Cosinus BQ, oder, $DC = \sqrt{(CB^2 - BD^2)}$ (Eb. Geom. §. 309.); oder, cos. ACB $= \sqrt{(1 - \sin. ACB^2)}$. Mit Hülfe dieses Satzes kann man, wenn die Sinus zweyer Winkel bekannt sind, auch den Sinus ihrer Summe finden. Der Winkel ACD heiße α und DCB heiße β; so ist DE = sin. α und EC = cos. α; ferner BF = sin. β und FC = cos. β, und BG = sin. $(\alpha + \beta)$.

Noch sey FH auf CA und FL auf BG senkrecht. Alsdann sind die Dreyecke EDC, HFC, GMC, MFL, LFB insgesammt einander ähnlich (Eb. Geom. §. 261. §. 267); auch ist (Eb Geom. §. 111.) FH = LG. Demnach ist a) CD : DE = FC : FH, oder, 1 : sin α = cos. β : FH; also, FH, oder LG = sin. $\alpha \times$ cos. β. b) ist CD : EC = BF : BL; oder, 1 : cos. α = sin. β : BL; also BL = cos. $\alpha \times$ sin. β. Also LG + BL, oder, BG, oder sin. $(\alpha + \beta)$ = sin. $\alpha \times$ cos. β + cos. $\alpha \times$ sin. β.

4) Auf diesem Wege nun kann man die Sinus aller Winkel von Minute zu Minute bis 90° finden.

§. 15.

Aufgabe.

Aus dem Sinus alle übrigen trigonometrischen Linien zu finden

Aufl. und Bew. 1) Wie aus dem Sinus der Cosinus gefunden werde, ist §. 14. Nr. 4. gezeigt.

2)

2) Wegen der Aehnlichkeit der Triangel DBC und AFC (Eb. G. §. 261.) ist DC ; BC = CA : AF, oder, cos. β : sin. β = 1 : tang. β; folglich tang. $\beta = \frac{\text{sin}.\beta}{\text{cos}.\beta}$.

3) Ist CF = $\sqrt{(CA^2 + AF^2)}$, oder sec. $\beta = \sqrt{(1 + \text{tang}.\beta^2)}$.

4) DA = CA — DC; das ist, sin. vers. β = 1 — cos. β. Bei dem stumpfen Winkel ACI, der β zu 180° ergänzt, ist AL = CA + LC, oder cos. (180° — β) = 1 + cos. β.

5) Hat man QE = CE — QC, oder, cos. vers. β = 1 — sin. β.

6) Weil CA ‡‡ EG, also CGE = FCA; so ist Δ AFC ∾ Δ EGC; folglich AF : CA = CE : CG; oder tang. β : 1 = 1 : cot. β; also cot. $\beta = \frac{1}{\text{tang}.\beta}$.

7) Weil CG = $\sqrt{(CE^2 + EG^2)}$, so ist cosec. $\beta = \sqrt{(1 + \text{cot}.\beta^2)}$.

§. 16.

Zusatz.

Ist ACF = 45°; so ist auch AFC = 45°; also AF = CA; oder, die Tangente eines Winkels von 45° ist dem Halbmesser gleich; und wenn also der Halbmesser = 1 ist; so sind die Tangenten der Winkel unter 45° kleiner als eins, oder, ächte Brüche.

§. 17.

Lehrsatz.

In einem rechtwinklichten Drenecke, AKC, verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Fig. 105.

Beweis. 1) Mit dem Halbmesser CA = CD ziehe den Bogen AD und fälle den Perpendikel DE, der also auch ⫲ AK ist. Nun ist (Eb. Geom. §. 255.) KC : AK = CD : DE, und (§. 11.) CD : DE = sin. tot. : sin. KCA; also KC : AK = sin. tot. : sin. KCA.

2) ist KC : CA = CD : CE; und CD : CE = sin. tot. : sin. CDE, oder sin. AKC (§. 11.); also KC : CA = sin. tot. : sin. AKC.

3) Weil nun (Nr. 1.).

AK : KC = sin. KCA : sin. tot. und (Nr. 2.).

KC : CA = sin. tot. : sin. AKC.

so ist (Eb. Geom. §. 237.).

AK : CA = sin. KCA : sin. AKC.

§. 18.

Lehrsatz.

In einem rechtwinklichten Drenecke, AKC, verhält sich jeder Kathet, CA, zum andern, AK, wie der ganze Sinus zur Tangente des Winkels, der dem andern Kathetus gegenüber steht.

Fig. 105.

Be-

Beweis. Es ist AK die Tangente des Winkels KCA für den Halbmesser CA. Demnach ist CA : AK = sin. tot. tang. KCA.

Nimmt man KA als Halbmesser, so ist CA die Tangente des Winkels AKC; also hat man AK : CA = sin. tot : tang AKC.

§. 19.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten gegen einander, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Beweis. 1) In dem spitzwinklichten Dreiecke, ABC, fälle den Perpendikel CG; so entstehen zwei rechtwinklichte, und es ist (§. 18.)

AC : CG = sin. tot : sin. A und

CG : CB = sin. B : sin. tot.

folglich (Eb. G. §. 238.).

AC : CB = sin. B : sin. A.

Auf die nämliche Art erhellet, daß

AC : AB = sin. B : sin. C, und

CB : AB = sin. A : sin. C.

2) Wäre ein Triangel, DEF, bei F stumpfwinklicht, so verlängere DF, und fälle den Perpendikel EH. Alsdann entstehen die rechtwinklichten Dreiecke DEH und FEH. Der Winkel

DFE heiße x, und EFH heiße y; alsdann ist (§. 18.).

$$DE : EH = \sin. tot ; \sin D;$$ und

$$EH : EF = \sin. y : \sin. tot;$$

folglich (Eb. G. §. 238.).

$$DE : EF = \sin. y : \sin. D.$$

oder (§. 10.).

$$DE : EF = \sin. x : \sin. D.$$

Auf die nämliche Art, wenn man nur EF durch F verlängert, erhellet, daß:

$$DF : DE = \sin E : \sin. x.$$

und aus beiden Proportionen folgt, (Eb. G. §. 237.).

$$DF : EF = \sin. E : \sin. D.$$

§. 20.

Lehrsatz.

Im Dreiecke ABC verhält sich die Summe zweier Seiten, AC + BC zu ihrer Differenz, AC — BC, wie die Tangente der halben Summe der gegenüber stehenden Winkel, zur Tangente ihrer halben Differenz = tang. $\frac{1}{2}(B+A)$: tang. $\frac{1}{2}(B-A)$.

Fig. 107.

Beweis. 1) Verlängere AC, nimm CD = CB = CE und ziehe BE; so ist (Eb. G. §. 187.) EBD = R. Ziehe ferner FA ‡‡ BE und verlängere DB bis F; so ist AFD auch = R. Also für

für den Halbmesser AF ist FB die Tangente des Winkels FAB und FD die Tangente des Winkels FAD. Auch ist AD = AC + BC und AE = AC — BC.

2) Nun ist (Eb. G. §. 82.) BCD = B + A und, weil CE = CB, so ist (Eb. G. §. 83.) BEC = $\frac{1}{2}$ BCD, mithin BEC = $\frac{1}{2}$ (B + A). Weil nun FA ‡‡ BE; so ist auch (Eb. G. §. 81.) FAD = $\frac{1}{2}$ (B + A).

Ferner ist FAB = FAD — A = $\frac{1}{2}$(B + A) — A = $\frac{1}{2}$B + $\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$A = $\frac{1}{2}$(B — A).

3) Demnach ist (Nr. 1. 2.) FD die Tangente von $\frac{1}{2}$ (B + A) und FB die Tangente von $\frac{1}{2}$ (B — A).

4) Weil BE ‡‡ AF, so ist (Eb. G. §. 251.) AD : AE = FD : FB; also, (Nr. 1. 3.), AC + CB : AC — CB = tang. $\frac{1}{2}$ (B + A) : tang. $\frac{1}{2}$ (B — A).

§. 21.

Aufgabe.

Die Seiten eines Dreiecks, ABC, sind bekannt, und aus dem einen Winkel fällt ein Perpendikel, BD; man soll die Abschnitte AD und DC finden, worin die Seite AC getheilt wird.

Beweis und Auflösung. 1) Wenn B ein rechter Winkel ist; so hat man (Eb. G. §. 267.) AC : AB = AB : AD. Man kann also AD finden, und hat dann auch DC = AC — AD.

 2)

2) Wenn B nicht = R ist; so nimm DE = DC; und verzeichne aus B einen Kreis mit dem Halbmesser BC, der also durch E gehet und AB in F schneidet. Verlängere AB bis G und ziehe noch EG, und FC. Alsdann ist AGE = FCA (Eb. G. §. 185.), ferner A = A, mithin Δ AGE $\backsim$ Δ FCA (Eb. G. §. 262.) und AC : AG = AF : AE.

Nun ist AG = AB + BC, und AF = AB — BC. Folglich

$$AC : AB + BC = AB - BC : AE.$$

Aber AE = AD — DE = AD — DC, also = der Differenz der gemachten Abschnitte, und die bekannte Seite AC ist ihre Summe.

Wenn man also AE gefunden hat; so hat man weiter (Arithm. §. 61.).

1) $AD = \frac{1}{2}(AC + AE)$ und

2) $DC = \frac{1}{2}(AC - AE)$.

Anmerkung.

Wenn man von einem Triangel zwar alle Winkel, aber keine Seite kennt; so kann man die Größe desselben gar nicht bestimmen. Es muß also, wenn man unbekannte Stücke desselben durch Rechnung suchen soll, wenigstens eine Seite bekannt seyn. Daher giebt es dann bei den trigonometrischen Aufgaben vier Fälle. Entweder

weder ist eine Seite gegeben, oder es sind zwei, oder alle drei Seiten gegeben. Wenn eine Seite gegeben ist, so müssen zwei Winkel gegeben seyn, wobei es gleich gilt, ob es die beiden anliegenden Winkel sind, oder nicht, indem man allemal den dritten auch kennt, sobald zwei bekannt sind. Wenn zwei Seiten gegeben sind, so muß noch ein Winkel gegeben seyn. Dieser ist entweder einer von denen, die den gegebenen Seiten gegenüber stehen; oder es ist der, der von ihnen eingeschlossen wird; und dieser Fall theilt sich also in zwey besondere Fälle.

§. 22.

Aufgabe.

Von einem Triangel, ABC, sind eine Seite AB und zwei Winkel gegeben; man soll den dritten Winkel und die übrigen Seiten finden.

Auflösung und Beweis. Fig. 106.

Der dritte Winkel ist aus §. 193. der eb. G. bekannt.

Weiter hat man (§. 19.).

$$\sin. C : \sin. B. = AB : AC, \text{ und}$$
$$\sin, C : \sin. A = AB : CB:$$

folglich:

$$AC = \frac{\sin. B \times AB}{\sin. C}, \text{ und}$$

$$CB = \frac{\sin. A \times AB}{\sin. C}.$$

23.

Aufgabe.

Es sind zwei Seiten, AB und AC, eines Dreiecks, nebst einem von den gegenüberstehenden Winkeln, C, gegeben, man soll die dritte Seite und die übrigen Winkel finden.

Auflösung und Beweis. Man kann zuerst die unbekannten Winkel finden.
Fig. 106. Denn es ist (§. 19.).

$$AB : AC = \sin. C : \sin. B.$$

Wenn man so den Winkel B gefunden hat; so ist auch A bekannt, und man hat ferner

$$\sin. C : \sin. A = AB : CB.$$

Anmerkung.

Wenn man den Winkel B auf vorgedachte Art sucht; so gehört freilich sin. B, wofern er nicht der sin. tot ist, zu zwei Winkeln, zu einem spitzen, und zu dem stumpfen, der den erstern zu 180° ergänzt. Wenn indessen der gegebene, C, ein rechter oder stumpfer ist, so muß B spitz seyn; oder, wenn auch C spitz, aber AB > AC ist; so muß B auch spitz seyn. Wenn dies alles nicht ist, so läßt sich doch gewöhnlich schon vor der Rechnung aus den vorhandenen Umständen abnehmen, ob B spitz oder stumpf sey.

§. 24.

Aufgabe.

Es sind zwei Seiten eines Dreiecks, AC und BC, nebst dem eingeschlossenen Winkel, C, gegeben; man soll die übrigen Winkel und die dritte Seite finden.

Auflösung und Beweis. Weil C gegeben ist; so ist (Eb. G. §. 193.) die Summe der beiden übrigen Winkel, B + A, mithin auch ihre halbe Summe, $\frac{1}{2}(B + A)$, bekannt; und man kann auch ihre halbe Differenz finden. Denn es ist (§. 20.). Fig. 107.

$$AC + BC : AC - BC = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B + A) : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B - A).$$

Wenn auf diese Art $\frac{1}{2}(B - A)$ gefunden ist; so ist ferner (Arithm. §. 61.) der größere von den beiden gesuchten Winkeln

$$B = \tfrac{1}{2}(B+A) + \tfrac{1}{2}(B-A)\ \text{und}$$
$$A = \tfrac{1}{2}(B+A) - \tfrac{1}{2}(B-A).$$

Die dritte Seite des Dreiecks, AB, wird dann, wie §. 23, gefunden.

§. 25.

Aufgabe.

Alle drei Seiten eines Dreiecks ABC sind gegeben; man soll die Winkel finden.

Auflösung und Beweis. Aus einem Winkel B, fälle einen Perpendi- Fig. 108.

 kel,

kel, BD, auf die gegenüberstehende Seite AC, und suche (§. 21.) die Abschnitte AD und DC.

Alsdann hat man in dem rechtwinklichten Dreiecke ABD zwei Seiten, AB und AD, und einen gegenüberstehenden Winkel, nämlich den rechten Winkel bei D. Man kann also (§. 23.) den Winkel A finden.

Eben so hat man im rechtwinklichten Dreiecke DBC, die Seiten BC und DC, nebst dem gegenüberstehenden rechten Winkel bei D; man findet also den Winkel C.

Wenn so die beiden Winkel A und C in dem gegebenen Dreiecke ABC gefunden sind, so ist auch der dritte bekannt.

Anhang.

Anhang.

Von den Logarithmen.

§. 26.

Erklärung.

Die Theile eines Verhältnisses sind Verhältnisse (Eb. G. §. 240.). Wenn man also Verhältnisse vergleichen will; so muß das Maaß, womit man sie misset, auch ein Verhältniß seyn. Nimmt man ein gewisses Verhältniß als das Maaß der übrigen an, so heiße es das Grundverhältniß.

§. 27.

Erklärung.

Wenn nun irgend ein Verhältniß gegeben ist, und man drückt durch eine Zahl aus, wie vielmal das Grundverhältniß oder irgend ein aliquoter Theil desselben in ihm enthalten sey; so heißt diese Zahl der Logarithme desselben (αριθμος λογȣ); und er werde durch l bezeichnet.

Anmerkung.

Das Grundverhältniß sey z. B. $= 2 : 1$; so ist der Logarithme des Verhältnisses $8 : 1 = 3$. Denn

Denn (Eb. G. §. 241.) $8 : 1 = \begin{Bmatrix} 2 : 1 \\ 2 : 1 \\ 2 : 1 \end{Bmatrix}$;
folglich log. $(8 : 1) = 3$.

§. 28.

Erklärung.

Sobald ein Grundverhältniß festgesetzt ist, sind auch die Logarithmen aller andern bestimmt. Der Inbegriff aller Logarithmen, sofern dabei einerlei Grundverhältniß zum Grunde liegt, ist ein **Logarithmensystem.**

§. 29.

Zusatz 1.

In jedem Systeme ist der Logarithme des Grundverhältnisses $= 1$. Ferner hat jedes Verhältniß, was sich aus dem Grundverhältnisse zusammensetzen läßt, eine ganze Zahl zum Logarithmen. Die Logarithmen der übrigen Verhältnisse aber sind keine ganze Zahlen.

§. 30.

Zusatz 2.

Der Logarithme des Verhältnisses einer Zahl zu eins, heißt auch der Logarithme dieser Zahl. So ist l (8 : 1) und l 8 einerlei. Diejenige Zahl, deren Logarithme $= 1$ genommen wird, heißt dann die **Grundzahl** (basis) des Systems.

§. 31.

Anmerkung.

In dem gemeinen Logarithmensystem, das nach seinem Urheber das Briggische genannt wird, ist die Zahl 10 die Basis. Also ist log. 10 = 1; log. 100 = 2, log. 1000 = 3 u. s. f. Es haben also nur die Zahl 10 und ihre Potenzen ganze Zahlen zu Logarithmen. Die Logarithmen der Zahlen unter 10 sind ächte Brüche, und die der übrigen unächte. Berechnet man die Logarithmen in Decimalbrüchen; so heißet die Ziffer, welche vor dem Komma zu stehen kommt, die Kennziffer des Logarithmen. Diese Kennziffer eines Logarithmen ist immer um Eins geringer, als die Anzahl der Ziffern, woraus die zugehörige Zahl besteht. Bei den Zahlen von 1 bis 9 ist 0 die Kennziffer der Logarithmen, von 10 bis 99 ist sie 1, von 100 bis 999 ist sie 2 u. s. f.

§. 32.

Lehrsatz.

Wenn a die Basis eines Logarithmensystems ist; so ist der Logarithme einer jeden Zahl einerlei mit dem Exponenten derjenigen Potenz von a, welche solcher Zahl gleich ist.

Beweis. Man setze eine Zahl, D, und es sey $D = a^m$. Nun ist (Eb. G. §. 243.).

$$a^m : = \left\{ \begin{array}{l} 1)\ a : 1 \\ 2)\ a : 1 \\ 3)\ a : 1 \\ \vdots \\ m)\ a : 1 \end{array} \right\}$$

mithin auch

$$D : 1 = \left\{ \begin{array}{l} 1)\ a : 1 \\ 2)\ a : 1 \\ 3)\ a : 1 \\ \vdots \\ m)\ a : 1 \end{array} \right\}$$

Folglich (§. 27.) log. $(D : 1) = m$, weil nun das Verhältniß $a : 1$ das Grundverhältniß ist; oder log. $D = m$ (§. 30.).

§. 33.

Lehrsatz.

Wenn man, einerlei System voraussetzt, die Logarithmen zweier Zahlen, A und B, zusammen addirt; so hat man den Logarithmen des Produkts aus diesen Zahlen.

Beweis. Es sey log. $A = m$, und log. $B = n$; so ist (§. 27.) das Grundverhältniß m mal in dem Verhältnisse $A : 1$ und n mal in dem Verhältnisse $B : 1$ enthalten.

Nun ist (Eb. G. §. 243.).

$$AB : 1 = \left\{ \begin{array}{l} A : 1 \\ B : 1 \end{array} \right\}.$$

Also

Also ist das Grundverhältniß m mal und n mal in dem Verhältnisse AB : 1 enthalten. Also (§. 27.) log. (AB : 1) = m + n; oder (§. 30.) m + n = log. AB.

§. 34.

Zusatz.

Der Logarithme der Quadratzahl ist doppelt so groß, als der Logarithme der Wurzel, der Logarithme der Kubikzahl dreimal so groß; und so so überhaupt log. a^m = m. log. a.

§. 35.

Lehrsatz.

Der Logarithme eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendums abzieht.

Beweis. Es sey $\frac{A}{B} = q$; so ist A = B. q. Folglich ist log. A = log. B + log. q; folglich log. q. = log. A — log. B.

§. 36.

Lehrsatz.

Wenn eine Zahl gegeben ist; so wird der Logarithme ihrer Wurzel von einer vorgeschriebenen Ordnung gefunden, wenn man den Logarithmen der gegebenen Zahl mit den Exponenten der vorgeschriebenen Ordnung der Wurzel dividirt.

Beweis. $\sqrt[n]{a^n} = a$. Nun ist (§. 34.) log. a^n = n. log. a.

Folglich $\frac{\log. a^n}{n} = \frac{n \log. a}{n} = \log. a.$

§. 37.

Zusatz.

Wenn man von dem Logarithmen einer Zahl die Hälfte oder den dritten Theil nimmt; so hat man, im ersten Falle den Logarithmen ihrer Quadratwurzel, und im andern Falle den Logarithmen ihrer Kubikwurzel.

§. 38.

Anmerkung.

Aus diesem allen läßt sich einsehen; wie ausgebreitet und groß der Nutzen der Logarithmen bei weitläuftigen Rechnungen ist; da man die Produkte oder Quotienten gegebener Größen durch eine leichte Addition oder Subtraktion ihrer Logarithmen finden, auch die Ausziehung aller Wurzeln durch eine einfache Division bewerkstelligen kann. Nur muß man Tafeln bei der Hand haben, worin die Logarithmen der Zahlen berechnet sind. Solcher Tafeln haben wir nach und nach mehrere bekommen. Nachdem der Schottländische Freiherr, Johann Neper, den Gebrauch der Logarithmen eingeführt hatte, lieferte

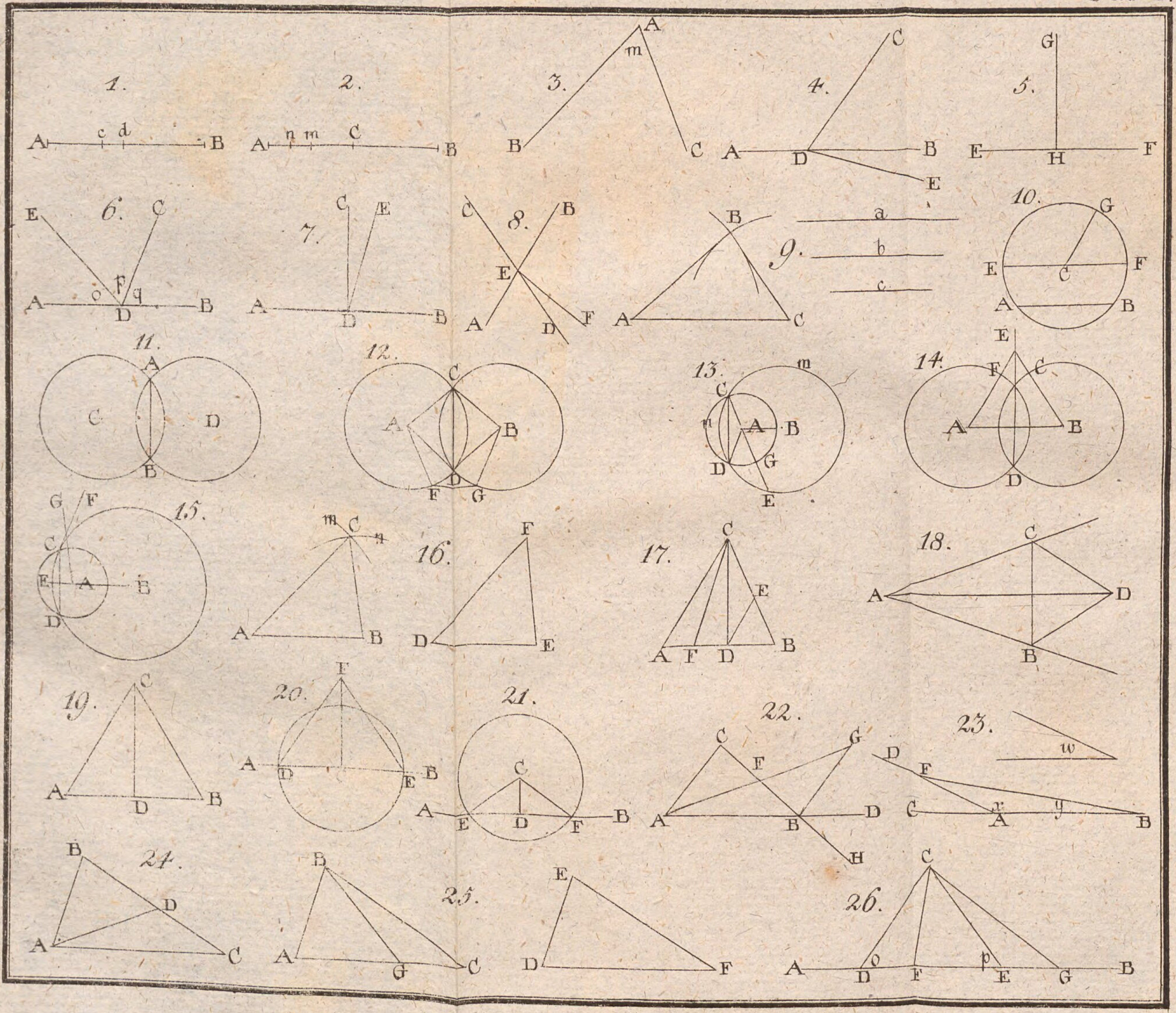
Hein-

Heinrich Brigg die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 im Jahr 1724. Ein Holländischer Mathematiker, Adrian Vlaq, ergänzte nachher die Logarithmen für die Zahlen von 20000 bis 90000. Die Basis, welche zuerst von Brigg zum Grunde gelegt wurde, war die Zahl 10. Nachher erschienen zu London die vortreflichen Sherwinschen Tafeln, die auch 1774 zu Avignon wieder aufgelegt sind. Im Jahre 1778 erhielten wir die neue und erweiterte Sammlung Logarithmischer Trigonometrischer und andrer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln, von Joh. Carl Schulz; und 1783 eine ähnliche Sammlung, unter dem Titel: Logarithmische, Trigonometrische und andre zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, von Georg Vega.

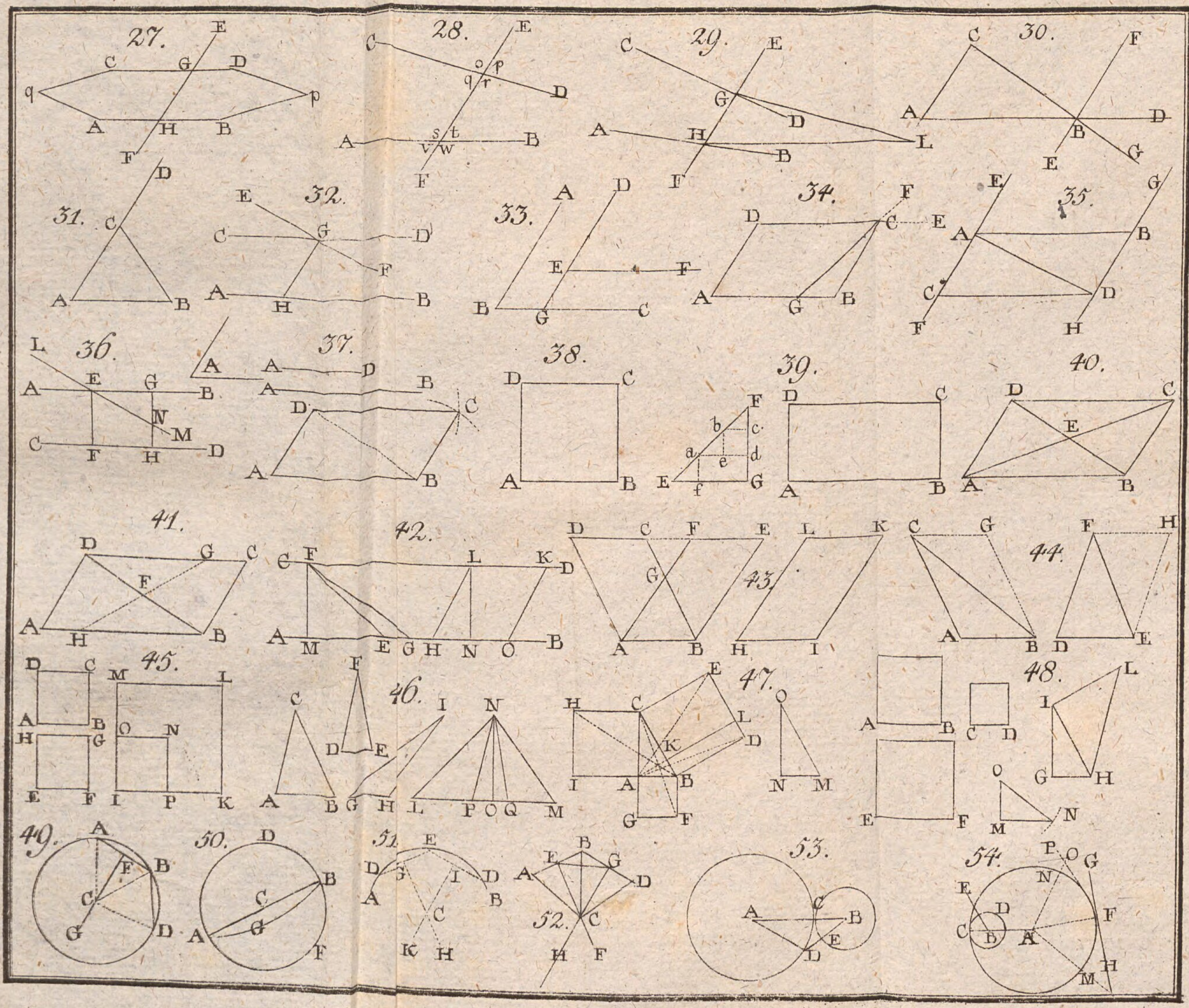
Verbesserungen.

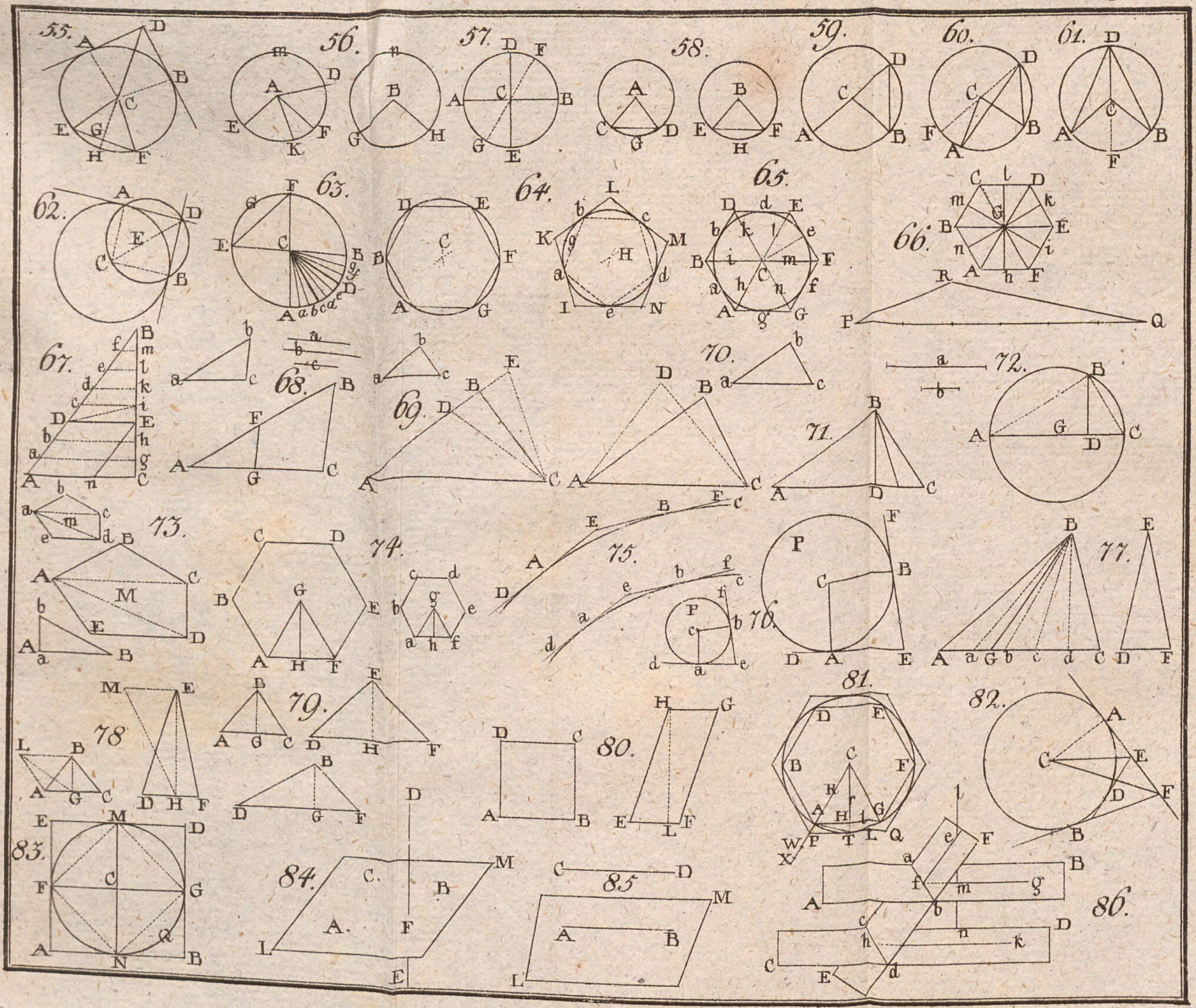
S. 3. Z. 12.	statt	glelchen	lies	gleichen.
— 5. — 1.	—	Gieichung	—	Gleichung.
— 7. — 24.	—	sehen	—	stehen.

Tab I.

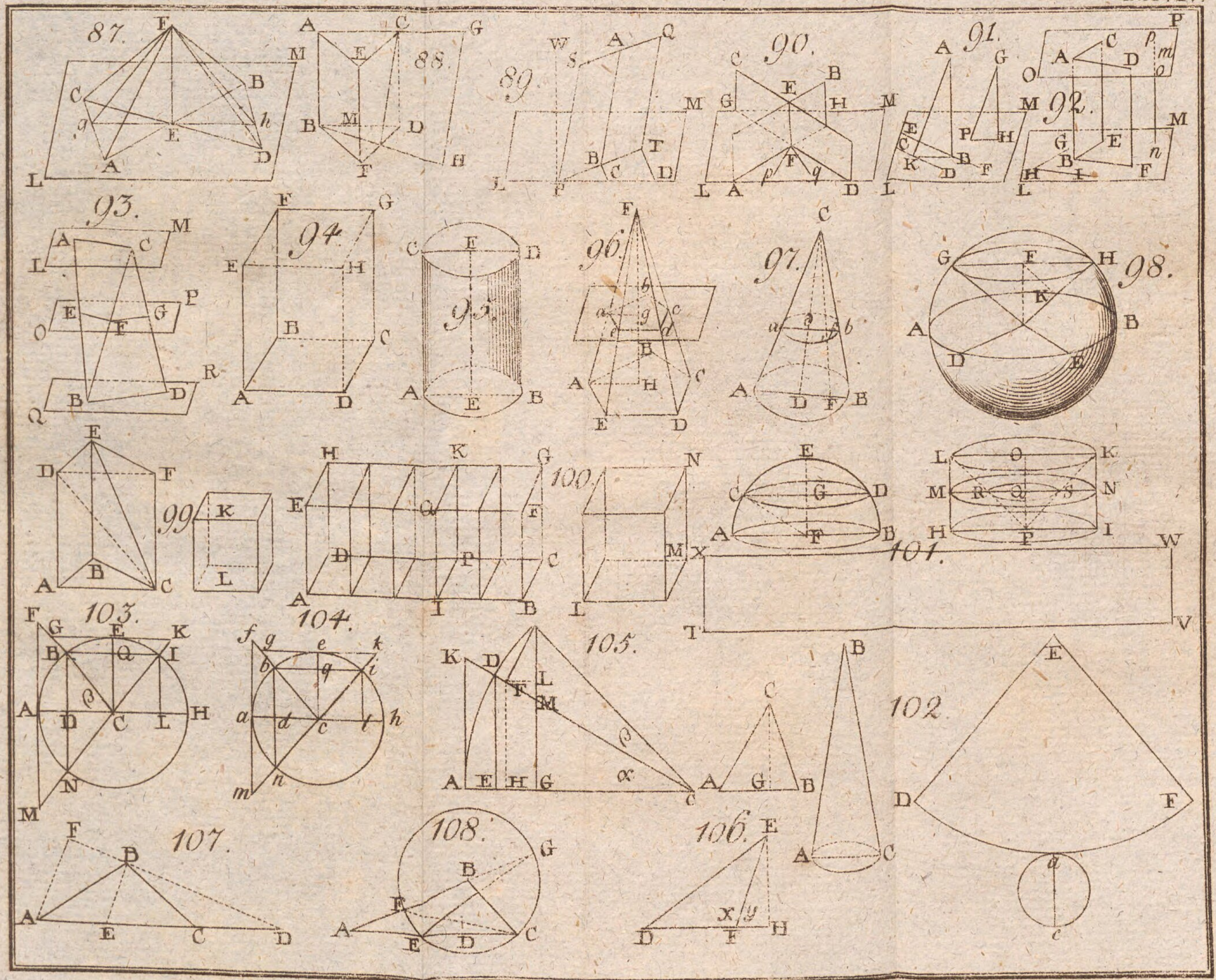


1. A c d B
2. A n m C B
3. A m B C
4. C A D B E
5. G E H F
6. E C o F q A D B
7. C E A D B
8. C B E A D F
A B C
9. a b c
10. G E C F A B
11. A C D B
12. C A B D F G
13. m C n A B D G E
14. E F C A B D
15. G F C E A B D
m C n A B
16. F D E
17. C E A F D B
18. C A D B
19. C A D B
20. F A D C E B
21. C A E D F B
22. C G F A B D H
23. w D F C x A y B
24. B D A C
25. B A G C
E D F
26. C o p A D F E G B


27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.


55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85
86.

Tab. IV.


87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.

1000,-
März 85

Maass, Johann Gebhard Ehrenreich,

Grundriß der reinen Mathematik

Halle 1796

Math.p. 325
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082337-7
VD18 11553022-002